# *O Método* de Arquimedes:

## Análise e Tradução Comentada

Ceno Pietro Magnaghi e
André K. T. Assis

# *O Método* de Arquimedes

***Análise e Tradução Comentada***

**C.P. Magnaghi e A. K. T. Assis**

**Apeiron**
**Montreal**

Published by C. Roy Keys Inc.
4405, rue St-Dominique
Montreal, Quebec H2W 2B2 Canada
http://redshift.vif.com


First Published 2019

**Library and Archives Canada Cataloguing in Publication**

Title: O método de Arquimedes : análise e tradução comentada / C.P. Magnaghi e Andre K.T. Assis.

Other titles: Ad Eratosthenem methodus. Portuguese

Names: Archimedes, author. | Magnaghi, C. P., 1942- translator, editor. | Assis, André Koch Torres, 1962- editor.

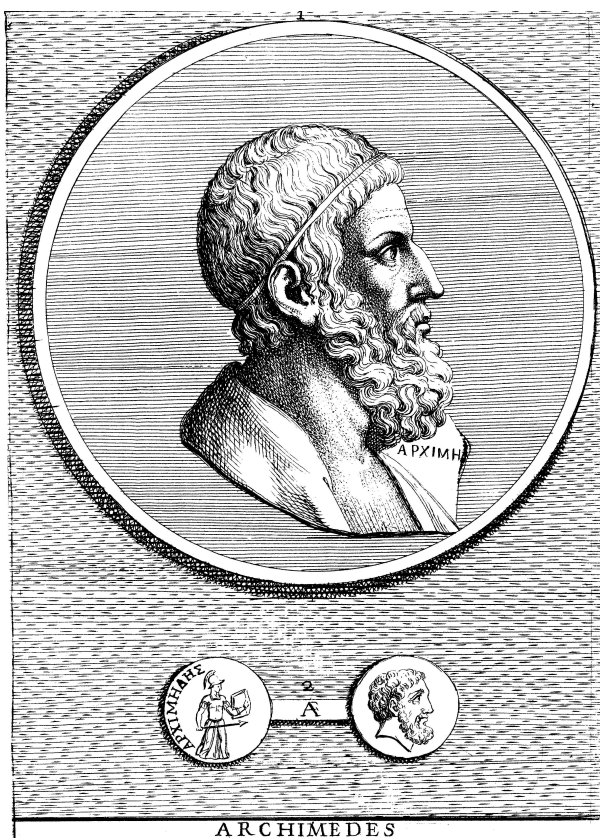
Description: Translation of: Archimedes. Ad Eratosthenem methodus. | Includes bibliographical references.

Identifiers: Canadiana (print) 20190080280 | Canadiana (ebook) 20190080566 | ISBN 9781987980172 (softcover) | ISBN 9781987980189 (PDF)

Subjects: LCSH: Archimedes. Ad Eratosthenem methodus. | LCSH: Geometry—Early works to 1800. | LCSH: Mathematics, Greek.

Classification: LCC QA31 .A75165 2019 | DDC 516—dc23

A figura da capa vem da página de rosto de uma coleção das obras de Arquimedes editada por Josephi Torelli em 1792.

# O MÉTODO DE ARQUIMEDES: Análise e Tradução Comentada

**C. P. Magnaghi e A. K. T. Assis**

*δός μοι ποῦ στῶ καὶ κινῶ τὴν γῆν.*

Dê-me um ponto de apoio e moverei a Terra.

# Sumário

# Agradecimentos

Queremos aqui agradecer a algumas pessoas que de uma forma ou de outra auxiliaram na realização deste trabalho: Fernando Jorge da Paixão Filho, Sandro Guedes de Oliveira, Varlei Rodrigues, Márcio A. A. Pudenzi, Adolfo Maia Jr., Domingos S. d. L. Soares, João Paulo Martins de Castro Chaib, José Joaquin Lunazzi, João F. N. Cortese, Eberhard Knobloch, Olga Pombo, Henrique José Sampaio Soares de Souza Leitão e Heinrich F. Fleck. Agradecemos a Daniel Robson Pinto pela assistência na elaboração das figuras. C. P. Magnaghi agradece especialmente ao Professor Flávio Ribeiro que, com seus ensinamentos, lhe permitiu voltar a apreciar a beleza da língua de Arquimedes. A. K. T. Assis agradece ao FAEPEX/UNICAMP pelo auxílio financeiro.

Ceno Pietro Magnaghi[1] e André Koch Torres Assis[2]

1 - Email: cenopietro@gmail.com

2 - Instituto de Física
Universidade Estadual de Campinas—UNICAMP
13083-859 Campinas, SP, Brasil
Email: assis@ifi.unicamp.br
Homepage: www.ifi.unicamp.br/~assis

# Capítulo 1

# Introdução

Em 1906 Johan Ludvig Heiberg (1854-1928), filólogo e historiador da ciência dinamarquês, descobriu um texto até então desconhecido de Arquimedes (287-212 a.C.). Era uma carta endereçada a Eratóstenes (285-194 a.C.), o famoso cientista grego responsável pela grande Biblioteca de Alexandria. Este trabalho tem sido desde então chamado usualmente de *O Método*.[1] Arquimedes apresentou um método heurístico para calcular áreas, volumes e centros de gravidade de figuras geométricas utilizando a lei da alavanca. Normalmente os cientistas usam a matemática para deduzir leis e propriedades físicas dos corpos. Arquimedes inverteu este procedimento ou paradigma com seu método, utilizando a física para derivar resultados matemáticos. Em particular, utilizou a lei da alavanca para calcular grandezas matemáticas tais como a área e o volume de uma esfera. Por este motivo seu método tem sido considerado por alguns autores como uma revolução copernicana.[2]

Esse livro apresenta uma análise e uma tradução comentada, do grego para o português, da obra *O Método* de Arquimedes. Ele é uma versão ampliada e melhorada de uma dissertação de mestrado de 2011.[3] Nele são incluídos também diversos elementos de uma versão ilustrada do método de Arquimedes no qual utilizamos o mínimo de matemática e uma grande quantidade de figuras ilustrando as alavancas em equilíbrio empregadas implicitamente por Arquimedes.[4]

[1] Alguns autores preferem traduzir o título dessa obra de Arquimedes utilizando a palavra "enfoque" em vez de "método," [Kno00], [Jul15] e [Kno16]. Nesse livro preferimos adotar a palavra "método" por ser aquela utilizada em todas as traduções conhecidas por nós.

[2] [Fon14] e [NN09, págs. 153-154, 161 e 193].

[3] [Mag11].

[4] [AM12], [AM14] e [AM16].

# Capítulo 2

# O Palimpsesto de Arquimedes

> Grande Descoberta Literária em Constantinopla; um Sábio Descobre Livros de Arquimedes, Copiados ao Redor de 900 d.C. Ela Abre Um Grande Campo de Pesquisa.

Essa é a manchete de primeira página do jornal New York Times de 16 de julho de 1907. Ela descreve a grande descoberta de Heiberg do palimpsesto de Arquimedes, o tema principal desse livro. A obra *O Método* de Arquimedes ficou desaparecida por mais de mil anos, até ser descoberta por Heiberg no *Metochion*,[1] biblioteca do Santo Sepulcro de Jerusalém, em Constantinopla. Na década de 1920 o palimpsesto desapareceu novamente, até surgir para venda em 1998 na casa de leilão Christie's de Nova York, como anunciado no New York Times em 27 de outubro de 1998:

> Um Texto Antigo de Arquimedes Reaparece e Está à Venda.

O resultado impressionante do leilão apareceu no New York Times três dias depois:

> Texto de Arquimedes Vendido por US$ 2 Milhões.

A história do palimpsesto de Arquimedes está bem contada no livro *Códex Arquimedes* de Reviel Netz e William Noel, assim como no artigo de Lowden.[2] O texto de Arquimedes contendo sua obra *O Método* estava escrito em um pergaminho, já que o papel ainda não era difundido no Ocidente. O pergaminho era (e ainda é) obtido a partir de uma pele animal submetida a um processo químico, usualmente com cal, e a uma raspagem para permitir uma boa adesão da tinta à sua superfície. Portanto, é natural que, sendo obtidos por um processo razoavelmente complexo, não houvesse uma grande abundância de pergaminhos.

[1] [NN09, pág. 138].
[2] [NN09] e [Low11].

Por esse motivo tornou-se muito comum a técnica do palimpsesto, que nada mais é do que a reciclagem dos pergaminhos. O termo palimpsesto deriva de duas palavras gregas: $\pi\alpha\lambda\iota\nu$ (palin = de novo) e $\psi\eta\omega$ (pseo = esfregar, raspar). O seu significado indica que o pergaminho usado como suporte do texto foi raspado mais de uma vez.

De acordo com Netz e Noel o texto de Arquimedes foi raspado e apagado em 1229 pelo padre Ioannes Myronas.[3] Ao começar a escrever o seu livro de orações ele não tinha os pergaminhos necessários e teve que se socorrer da técnica do palimpsesto. Para isso reciclou os materiais disponíveis, entre eles alguns pergaminhos antigos contendo textos gregos de matemática que certamente não tinham muita utilidade para os monges. Feita a raspagem, ele escreveu no palimpsesto as suas orações, que foram lidas pelos monges durante algumas centenas de anos. Felizmente a raspagem não foi muito bem sucedida e o texto matemático original não foi totalmente eliminado.

Em 1899 foi feito um catálogo das obras existentes no *Metochion* do Santo Sepulcro de Jerusalém, em Constantinopla. No catálogo foi identificado um manuscrito de orações contendo, parcialmente apagado, um texto grego de matemática. Tratava-se do livro escrito por Ioannes Myronas 670 anos antes.

Em 1906 o professor Johan Ludvig Heiberg (1854-1928), Figura 2.1, da Universidade de Copenhague tomou conhecimento da existência em Constantinopla, de um palimpsesto contendo textos gregos de matemática. Ele foi um estudioso excepcional e pesquisador infatigável dos clássicos gregos de matemática aos quais dedicou grande parte da sua vida.[4]

Entre as suas inúmeras publicações podemos citar a edição de obras de diversos autores importantes:

1. A obra completa de Arquimedes (1880-1881).

2. *Os Elementos* de Euclides (1883).

3. As *Cônicas* de Apolônio (1891).

Ao ver o palimpsesto em Constantinopla, reconheceu facilmente no texto apagado o trabalho de Arquimedes. Além disso, conseguiu identificar uma obra que estava perdida há mais de 2.000 anos: **O Método Sobre os Teoremas Mecânicos**.

Em 1907 Heiberg publicou o texto grego e a tradução em alemão de *O Método*.[5]

Pouco tempo depois o palimpsesto desapareceu novamente, reaparecendo somente em 1998 para ser leiloado na casa de leilão Christie's de Nova York. Ele foi arrematado por intermédio de terceiros, por uma pessoa que não quis revelar o seu nome até o momento, e que o entregou ao museu de arte Walters de Baltimore (Estados Unidos) para conservação e estudos. Nesta ocasião foi reunido

[3] [NN09, págs. 287 e 296].
[4] [Pet11].
[5] [Hei07], [HZ07], [Arc63] e [Arc11c].

Figura 2.1: J. L. Heiberg.

um grupo multidisciplinar de especialistas em manutenção e recuperação de manuscritos antigos, em grego clássico e em matemática antiga. Para recuperar o texto de Arquimedes foram usadas técnicas modernas de fotografia digital, de iluminação com diferentes comprimentos de onda e até fluorescência de raios X no *Stanford Linear Accelerator Center*, SLAC.[6]

É interessante citar aqui um parágrafo do livro de Hirshfeld:[7]

> Neste trecho de sua longa e peripatética existência o manuscrito viajou de uma biblioteca monástica na Terra Sagrada para o Metochion - "casa-filha" - da Igreja do Santo Sepulcro de Jerusalém, em Constantinopla. E lá, durante o verão de 1906, foi examinado pelo Professor Johan Ludvig Heiberg, o principal filólogo do mundo, que havia viajado com pressa de Copenhague para ler o velho documento. Com sua barba bíblica e olhar fixo, a própria presença de Heiberg lançou a biblioteca em uma confluência entre o mundo antigo e o moderno.

Uma imagem do palimpsesto de Arquimedes obtida com os recursos de 1907 encontra-se na Figura 2.2.[8]

Recentemente foi publicado o texto completo do palimpsesto de Arquimedes, obtido com as melhores técnicas de hoje.[9]

[6] [NN09, págs. 284-286].
[7] [Hir09, págs. 103-104].
[8] [Hei07].
[9] [NNWT11a] e [NNWT11b].

Figura 2.2: Uma página do palimpsesto de Arquimedes.

# Capítulo 3

# Objetivos desse Livro

Apresentamos a seguir alguns dos principais objetivos desse trabalho.

- Depois que Heiberg publicou o trabalho de Arquimedes tanto no original em grego quanto traduzido para o alemão,[1] foram feitas traduções para diversos idiomas: italiano,[2] espanhol,[3] francês,[4] inglês[5] e português.[6] Nosso objetivo neste livro foi fazer uma nova tradução para o português a partir do original grego, enriquecendo-a com uma análise detalhada, acrescentando ainda os conceitos físicos e matemáticos necessários à compreensão do trabalho de Arquimedes.

- Além da tradução completa, acrescentamos no Capítulo 11 diversas Notas de rodapé que facilitam na compreensão de certas expressões empregadas por Arquimedes.

- No intuito de entender melhor o raciocínio matemático empregado por Arquimedes, achamos por bem incluir no Capítulo 8 alguns pontos fundamentais da geometria grega da época. Em particular, discutimos a álgebra geométrica, a aplicação das áreas e a teoria das proporções. No mesmo sentido incluímos no Capítulo 9 como Arquimedes tratava as seções cônicas (parábola, elipse e hipérbole). O material destes dois Capítulos foi essencialmente extraído das obras de Dijksterhuis, Heath, Mugler e Rufini quando discutem estes temas,[7] e oferece ao leitor uma visão detalhada das deduções matemáticas utilizadas por Arquimedes. Com isto o leitor não necessitaria aprofundar-se demasiadamente na matemática dos antigos gregos.

---

[1] [Hei07], [HZ07], [Arc63], [Arc11c] e [NNWT11b].
[2] [Arc61] e [Arc14, págs. 97-157].
[3] [Arq66] e [Arq86].
[4] [Arc71].
[5] [Smi09], [Arc09], [Arc87] e [Arc02a].
[6] [Arq04a] e [Mag11].
[7] [Dij87], [Arc02b], [Hea81a], [Hea81b], [Mug70], [Mug71a], [Mug71b], [Mug72] e [Ruf61].

- Nossa principal contribuição neste trabalho está contida no Capítulo 10, *A Essência do Método de Arquimedes.* O objetivo aqui foi de apresentar os principais argumentos físicos que ele utilizou para chegar em resultados puramente geométricos ou matemáticos (cálculos de áreas, de volumes e de centros de gravidade de algumas figuras). Em sua obra Arquimedes utiliza apenas uma figura para cada teorema. Esta figura em geral apresenta objetos tridimensionais vistos de lado. Não é fácil visualizar o que ele tinha em mente. O tempo todo ele fala de alavancas em equilíbrio em diversas situações, mas nenhuma figura contendo alavancas é encontrada em *O Método.* Além disso, as demonstrações matemáticas são feitas apenas em palavras, sem mencionar explicitamente os postulados ou resultados anteriores que estão sendo empregados em cada passagem. Foi para superar estas limitações e apresentar ao leitor a essência do método físico utilizado por Arquimedes que preparamos o Capítulo 10. Este Capítulo apresenta figuras de todas as alavancas em equilíbrio consideradas ao longo de cada uma das demonstrações, além de chamar a atenção para todos os postulados e resultados prévios que são necessários ao longo das demonstrações de cada teorema. Esperamos que após acompanhar este Capítulo o leitor possa seguir com mais proveito a tradução da obra de Arquimedes e com isto perceber a profundidade e beleza do seu raciocínio.

- Diversos aspectos técnicos e matemáticos foram deixados na forma de Apêndices.

- Incluímos uma ampla bibliografia que possa permitir ao leitor se aprofundar em qualquer tema discutido neste trabalho.

- Ao divulgar no meio científico nacional este livro de Arquimedes que ficou desconhecido por mais de 2.000 anos, queremos salientar uma metodologia que o próprio autor considerou muito importante e alguns aspectos da mesma que continuam atuais até hoje.

  Encontramos nesse livro um dos embriões da física teórica e experimental pelo uso da lei da alavanca na obtenção de informações sobre grandezas geométricas (cálculos de áreas, volumes e centros de gravidade).

  Também podemos apontar neste trabalho as ideias básicas do cálculo integral que somente foram desenvolvidas e estruturadas depois de 1.800 anos.

  Finalmente as conclusões de alguns de seus teoremas foram colocadas em prática em obras de engenharia que podemos admirar ainda hoje depois de 1.500 anos da sua construção.

  Escolhemos enriquecer o texto com comentários acompanhados de figuras. Estas figuras às vezes apresentam corpos tridimensionais vistos em perspectiva. Outras vezes apresentam explicitamente alavancas em equilíbrio com corpos dependurados em seus braços a certas distâncias específicas do fulcro da alavanca, sempre seguindo as especificações de Arquimedes.

Acreditamos que muitas passagens de aparência complexa possam ser compreendidas de modo mais intuitivo através das figuras que usamos para ilustrar *O Método* de Arquimedes.

# Capítulo 4

# Arquimedes e Outros Cientistas Gregos

## 4.1 Demócrito

Demócrito (aproximadamente 460-370 a.C.) foi um filósofo grego nascido em Mileto.[1] Viajou e realizou estudos na Babilônia, no Egito e em Atenas. Ficou conhecido pela criação, desenvolvimento e sistematização da teoria atomista juntamente com Leucipo (século V a.C.). De acordo com essa concepção toda a matéria é constituída por elementos pequenos, compactos e impenetráveis, portanto indivisíveis (a palavra átomo em grego significa indivisível). Além da filosofia, Demócrito dedicou-se também a estudos de matemática e geometria, tendo escrito diversos livros sobre esses temas, dos quais nos chegaram apenas os títulos. Sabemos porém que seus estudos sobre esses assuntos eram bem conhecidos pelos matemáticos da época, podendo até ter influenciado Euclides. O próprio Arquimedes na introdução de *O Método* refere-se a Demócrito como sendo "o primeiro a revelar o enunciado dessa propriedade das figuras indicadas, sem demonstração." A propriedade mencionada é que o volume da pirâmide é a terça parte do prisma tendo mesma base e altura, e que o volume do cone é a terça parte do cilindro tendo a mesma base e altura. Arquimedes menciona ainda que o primeiro a apresentar a demonstração desse enunciado foi Eudoxo. Embora a obra de Demócrito contendo esse resultado não tenha chegado até nós, parte de seu raciocínio nos foi transmitido por Plutarco (45-125 d.C.) em seu trabalho *Noções Comuns Contra os Estoicos*:[2]

> [...] se um cone for cortado com um plano paralelo à base,[3] o que se deve pensar das superfícies das seções, seriam iguais ou desiguais? Pois sendo desiguais mostrarão o cone irregular, constituído por muitos degraus totalmente desiguais; mas sendo as seções iguais, o cone parecerá ter as

[1] [Hea81a, Democritus, págs. 176-181].

[2] [Plu, 1079e], [Hea81a, págs. 179-180] e [OR99].

[3] Demócrito estava se referindo a um plano infinitamente próximo à base do cone.

> propriedades do cilindro, constituído de círculos iguais e não desiguais, o que é totalmente absurdo.

Essa citação mostra que Demócrito tinha a ideia de um sólido ser composto pela soma de uma infinidade de seções planas ou por uma infinidade de lâminas indefinidamente finas. Essa ideia pode estar na raiz do argumento que usou para chegar na verdade dessa proposição, como mencionado por Heath.[4]

Há um caso específico mostrando que essa proposição é verdadeira sem que seja necessário utilizar uma demonstração matemática complicada.[5] Inicialmente consideramos um cubo de lado $a$. Ligamos o centro do cubo aos oito vértices. Vemos então que o volume do cubo $a^3$ é igual ao volume de seis pirâmides de base quadrada com lado $a$ e altura $a/2$. Se cortarmos o cubo ao meio por um plano paralelo a uma de suas faces passando pelo centro do cubo, ficaremos com dois prismas de base quadrada de lado $a$ e altura $a/2$. Cada prisma terá então um volume igual ao volume de três pirâmides. Logo, o volume de cada pirâmide é igual a um terço do prisma com mesma base e mesma altura.

Uma demonstração simples dessa proposição no caso de um prisma de base triangular encontra-se no livro *A Rainha das Ciências*.[6]

## 4.2 Eudoxo

Eudoxo (aproximadamente 408-355 a.C.) foi um matemático, astrônomo e filósofo grego.[7] Viajou para o Egito de onde teria trazido importantes conhecimentos de astronomia. Sabe-se que esteve na Sicília e no sul da Itália, em contato com mestres da Escola Pitagórica, mas passou a maior parte de sua vida na Grécia (Cnido). É reconhecido por ter organizado e desenvolvido a teoria das proporções[8] que permitiu aos gregos a resolução de equações e o método de exaustão que foi amplamente usado na antiguidade na determinação de áreas e volumes de figuras geométricas. Arquimedes cita o nome de Eudoxo, por exemplo, na introdução de seu trabalho *Sobre a Esfera e o Cilindro*, utilizando o método da exaustão nas proposições 33 e 34.[9]

Rufini nos fornece uma síntese do "método de exaustão":[10] Para demonstrar que a área ou o volume $A$ de uma determinada figura é igual a uma área ou volume $B$, demonstrava-se que $A$ não podia ser nem maior nem menor do que $B$. Isso era feito por uma dupla "redução ao absurdo" da tese contrária.

Demonstrações detalhadas do uso do "método da exaustão" na determinação de áreas e volumes podem ser encontradas nos originais de Euclides[11] e Arqui-

---

[4] [Hea81a, pág. 176].
[5] [Did49], [Did75] e [Mac76, p. 255].
[6] [Gar07, págs. 74-75].
[7] [Hea81a, Eudoxus, págs. 322-335].
[8] Discutida na Seção 8.3.
[9] [Arc02b, págs. 1-55].
[10] [Ruf61, pág. 62].
[11] [Euc09, Livro XII, Proposição 10, págs. 543-546].

medes.[12]

## 4.3 Euclides

Pouco se sabe sobre a vida de Euclides (aproximadamente 300 a.C.),[13] sendo desconhecidos os lugares do nascimento e da morte, bem como as respectivas datas. O pouco que sabemos da sua vida nos chegou através de historiadores ou outros matemáticos que viveram vários séculos depois. Segundo o filósofo e matemático Proclo (410-485) que escreveu comentários ao primeiro livro de *Os Elementos* de Euclides,[14] Euclides deveria ser mais jovem do que os discípulos de Platão, mas mais velho do que Eratóstenes e Arquimedes. Segundo Papo de Alexandria (último dos grandes matemáticos gregos, que viveu no final do século III d.C.),[15] é certo que Euclides participou da famosa Academia de Alexandria, que se tornou o centro do conhecimento da época, onde dedicou-se ao estudo e ao ensino de matemática e da astronomia. Sua obra mais conhecida, *Os Elementos*, constituiu a base do ensino da matemática (principalmente geometria e aritmética) até o início do século XX. Nessa obra encontramos os princípios da disciplina que ainda hoje chamamos de "geometria euclidiana." Ela abrange todo o conhecimento de aritmética e geometria existente na época, organizado de maneira lógica e sistêmica, reunindo não somente teoremas do autor, bem como teoremas e demonstrações de estudiosos anteriores a Euclides. Os treze livros da obra *Os Elementos* são apresentados da seguinte maneira:

- Livros I-III: Definições, postulados e geometria plana.
- Livro IV: Polígonos.
- Livro V: Teoria das proporções.
- Livro VI: Figuras semelhantes.
- Livros VII-IX: Teoria dos números.
- Livro X: Incomensuráveis.
- Livros XI-XIII: Geometria espacial.

O chamado *Livro sobre a Balança* tradicionalmente atribuído a Euclides e lidando com a lei da alavanca já se encontra traduzido para o português.[16]

[12] [Arc02b, Sobre a Esfera e o Cilindro, Proposições 33 e 34, págs. 39-44].
[13] [Hea81a, Cap. XI: Euclid, págs. 354-446].
[14] [Hea81b, Proclus, págs. 529-537].
[15] [Hea81b, Cap. XIX, págs. 355-439].
[16] [Ass08, Apêndice A: Tradução Comentada do *Livro sobre a Balança*, Atribuído a Euclides].

## 4.4 Eratóstenes

Eratóstenes (285-194 a.C.) foi um matemático e astrônomo grego, contemporâneo de Arquimedes.[17] Estudou em Atenas e Alexandria, onde também foi curador da famosa Biblioteca durante muitos anos. Por seus estudos e trabalhos sobre geografia é também considerado como o fundador dessa disciplina. O trabalho mais conhecido de Eratóstenes, usando seus conhecimentos de geografia e astronomia, foi a determinação da circunferência ou do raio da Terra, uma vez que muitos, já naquela época, a consideravam redonda. Mesmo com os escassos recursos então existentes, conseguiu obter um valor muito próximo das medições mais precisas de hoje.[18] Arquimedes endereçou ao amigo Eratóstenes em Alexandria sua carta contendo *O Método*.

## 4.5 Arquimedes

A vida e a obra de Arquimedes são bem conhecidas, desde a sua época.[19] Mas hoje, 2.300 anos depois, torna-se difícil separar o que é a lenda do que foi a realidade. Costuma-se dizer que tenha vivido entre 287 e 212 a.C. na cidade de Siracusa, na Sicília, onde passou a maior parte de sua vida. Na realidade temos alguma certeza sobre o ano de sua morte, 212 a.C., pois sabe-se que está ligada a fatos históricos importantes que foram relatados por vários historiadores, entre os quais existe uma boa concordância. Mas o que podemos dizer quanto à data de seu nascimento? Tudo o que "sabemos" a respeito disso é que Arquimedes morreu à idade de 75 anos e daí foi deduzida a data de seu nascimento. Acontece que esta última informação nos chegou através de um único historiador que viveu quase 1.500 anos depois de Arquimedes, Johannes Tzetzes![20]

Hoje temos quase certeza que, durante sua vida, Arquimedes passou algum tempo no Egito. Provavelmente até tenha estudado na cidade de Alexandria, que era então o centro científico e cultural do mundo e era sede da famosa biblioteca. Euclides, autor de *Os Elementos*,[21] a pedido do rei Ptolomeu, ensinou por muitos anos na Academia desta cidade. Muitas das cartas de Arquimedes foram endereçadas a cientistas que trabalharam em Alexandria: Cónon de Samos, Dositeu de Pelúsium e Eratóstenes.

Talvez este seja um dos principais motivos pelos quais muitas das obras de Arquimedes chegaram até nós, pois era na biblioteca de Alexandria, anexa ao famoso templo dedicado às Musas, *Museu*, que os tratados considerados importantes eram muitas vezes copiados e as cópias eram conservadas até em um lugar diferente.[22] Arquimedes devia conhecer bem a importância e o funcionamento

[17] [Hea81b, Eratosthenes, págs. 104-109].
[18] [Hea81b, págs. 106-109].
[19] [Hea81b, Cap. XIII: Archimedes, págs. 16-109], [Dij87], [Arc02b], [Gey06], [Soa14, Cap. 1] e [Ror].
[20] [NN09, pág. 41] e [NN07b, pág. 55].
[21] [Euc56a] e [Euc09].
[22] As cópias de obras importantes eram conservadas no Templo de Serápis, como discutido no Capítulo 6.

da biblioteca de Alexandria. Quando escreve a Eratóstenes em *O Método*, ele comenta: "... entendo que alguns dos meus contemporâneos ou sucessores encontrarão, por meio do método demonstrado, outros teoremas que ainda não me ocorreram." Ou seja, ele acreditava que seus trabalhos fossem destinados à posteridade.

Por outro lado, não há indícios de que ele tenha escrito algo referente aos seus trabalhos de natureza mais prática, ou àquilo que hoje poderíamos chamar de obras de "engenharia." Este é um dos motivos pelos quais muitos historiadores acreditam que ele não teria dado importância a esta parte de sua atividade. Este fato também pode ter levado outros historiadores a acreditarem que muitos dos feitos a ele atribuídos pela tradição, teriam sido somente ideias que não foram realizadas na prática ou, mesmo que tenham sido realizações concretas, o passar do tempo se encarregou de engrandecer.

Citamos aqui apenas alguns dos feitos atribuídos a Arquimedes por Plutarco (45-125 d.C.).[23] Ele foi o historiador que viveu mais próximo à época de Arquimedes e que relatou fatos históricos correlatos à vida do mesmo. Em particular, mencionou diversos feitos atribuídos a Arquimedes quando descreveu o cerco da cidade de Siracusa, que foi tomada pelos romanos sob o comando do general Marcus Claudius Marcellus em 212 a.C.

Segundo Plutarco e outros historiadores da época, como Políbio (203-118 a.C.) e Tito Lívio (59 a.C. - 17 d.C.),[24] Arquimedes participou ativamente da defesa de sua cidade contra o sítio da frota romana, durante a Segunda Guerra Púnica, por meio de várias das suas invenções. Entre estas invenções são mencionadas as catapultas. Embora já fossem conhecidas e usadas anteriormente, as de Siracusa tinham alcance regulável de modo a evitar "pontos cegos" e dificultar o avanço do exército inimigo. Talvez possamos supor aqui a intervenção do conhecimento de Arquimedes sobre as parábolas e algum tipo de observação sobre o movimento dos projéteis 1.800 anos antes de Galileu? Simultaneamente, para deter o ataque da frota romana, eram usados grandes braços mecânicos para verter acima dos muros e sobre os navios inimigos enormes pedras, ao mesmo tempo que "mãos de ferro" eram jogadas para agarrar as proas dos barcos levantando-as e deixando-as cair sobre a popa dos mesmos, afundando-os.[25]

Certamente a descrição fantasiosa destes artefatos bélicos é um reconhecimento do historiador à genialidade de Arquimedes.[26] Com seus conhecimentos de mecânica, Arquimedes conseguiu parar um exército inteiro que cercava sua cidade por terra e por mar, durante vários anos.

Outros trabalhos de Arquimedes ligados de alguma forma à "engenharia" despertaram a atenção de escritores com interesse em áreas específicas. Vitruvio (70 a.C. - 15 d.C.) no seu livro *De Architectura* cita trabalhos de Arquimedes

---

[23] [Plu87, págs. 356-358].

[24] [Dij87, pág. 27].

[25] Tito Lívio, [Tit, XXIV, 34]: "... eminente ferrea manus firmae catenae inligata cum iniecta prorae...; uma mão de ferro saindo (dos muros) ligada a uma forte corrente lançada sobre a proa..."

[26] Tito Lívio, [Tit, XXIV, 34], "Arquimedes... inventor e construtor de máquinas de guerra."

em várias ocasiões.[27] Por exemplo, o "problema da coroa," cuja solução teria sido encontrada por Arquimedes, determinando a concentração de ouro e prata em uma coroa do rei Heron,[28] com base nas leis da hidrostática por ele descobertas.[29] Vitruvio também fornece uma descrição detalhada de um mecanismo de levantamento de água, até hoje conhecido como cóclea (caracol), ou parafuso de Arquimedes, que parece ter sido usado nas minas e na irrigação dos campos.

Outros escritores, como Cicero (106-43 a.C.),[30] mencionam a construção, por parte de Arquimedes, de um planetário, no qual o movimento dos corpos celestes era obtido por meio de mecanismos hidráulicos. Outros ainda falam que tenha construído um "órgão hidráulico" no qual o ar dentro dos tubos era comprimido sobre água. Durante a defesa de Siracusa também ficou famosa a história da queima dos navios romanos por espelhos capazes de concentrar os raios do sol. Esta técnica foi atribuída a Arquimedes por vários autores, tais como Luciano de Samosata (125-181 d.C.),[31] mas foi posta em dúvida devido à inexistência, naquela época, de tecnologias adequadas à sua construção.

A conquista de Siracusa pelos romanos somente foi possível em 212 a.C., após um cerco que durou quase três anos. O cônsul Marcelo, que durante todo esse tempo de luta havia adquirido um grande respeito pelo "velho homem," ordenou que a vida de Arquimedes fosse poupada. Apesar disso, segundo a tradição,[32] Arquimedes acabou sendo morto por um soldado enquanto estava concentrado nas suas figuras.

Mesmo a ascendência de Arquimedes está condicionada a muitas dúvidas. Aquilo que conhecemos está contido em um trecho da obra *Contador de Areia* do próprio Arquimedes. Este trabalho nos chegou através de repetidas cópias. A existência destas e de muitas outras dúvidas ligadas fatalmente ao tempo, nos faz perceber a importância do descobrimento de um manuscrito contendo, junto com outras obras, uma cópia do *Método sobre os Teoremas Mecânicos*.

Esta obra de Arquimedes estava perdida e não se conhecia seu conteúdo. O manuscrito que foi encontrado é uma cópia na língua original de uma carta escrita pelo próprio Arquimedes, endereçada ao amigo Eratóstenes, curador da biblioteca de Alexandria.

É através desta e das outras obras que chegaram até nossos dias, que podemos conhecer e compreender o pensamento deste gênio, mesmo que sejam lendas muitas das histórias ou das invenções a ele atribuídas.

### 4.5.1 Arquimedes, o Círculo e a Esfera

Arquimedes sempre teve grande interesse nas propriedades geométricas do círculo e da esfera, sendo que foi ele quem obteve as principais propriedades destas fi-

[27] [Vit, Livro IX, Prefácio, §9].
[28] Também escrito como Hero, Hierão e Herão.
[29] Para uma discussão deste problema ver também os comentários de Heath, [Arc02b, Capítulo I e as págs. 259-261].
[30] [Cica, Livro I, §21].
[31] [Sam62, pág. 41].
[32] Tito Lívio, [Tit, Livro XXV, §31].

guras.[33] Ele sabia que o perímetro ou comprimento da circunferência de um círculo é proporcional a seu diâmetro. Na sua época o teorema descrevendo esta proporcionalidade deveria ser expresso da seguinte maneira:

Os comprimentos de duas circunferências estão entre si como seus diâmetros.

Sejam $c_1$ e $c_2$ os perímetros ou comprimentos das circunferências de raios $r_1$ e $r_2$, respectivamente, como na Figura 4.1.

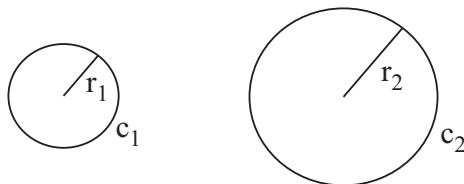



Figura 4.1: Circunferências de raios $r_1$ e $r_2$ com comprimentos $c_1$ e $c_2$, respectivamente.

Sejam $d_1 = 2r_1$ e $d_2 = 2r_2$ os diâmetros dessas circunferências. O teorema da proporcionalidade entre os comprimentos e os diâmetros pode ser expresso matematicamente da seguinte maneira:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{2r_1}{2r_2} = \frac{r_1}{r_2} \ . \tag{4.1}$$

Em 1706 o matemático William Jones (1675-1749) propôs que se passasse a utilizar o símbolo $\pi$ para representar a razão da circunferência de um círculo para seu diâmetro. Esta definição de $\pi$ foi popularizada pelo famoso matemático e físico Leonhard Euler (1707-1783) em 1737. Vamos representar nesse livro qualquer definição pelo símbolo $\equiv$. Dessa forma a definição atual de $\pi$ pode ser expressa matematicamente da seguinte maneira, considerando uma circunferência qualquer de comprimento $c$, diâmetro $d$ e raio $r$:

$$\pi \equiv \frac{c}{d} = \frac{c}{2r} \ . \tag{4.2}$$

Com esta definição de $\pi$, o comprimento de qualquer circunferência pode ser escrito como:

$$c = 2\pi r \ . \tag{4.3}$$

Foi apenas em 1761 que o matemático J. H. Lambert (1728-1777) provou que $\pi$ é um número irracional, de tal forma que ele não pode ser expresso como a razão de dois números inteiros.

Embora Arquimedes não tenha mencionado nada sobre a irracionalidade da razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro, ele obteve uma

[33] Capítulo 3 de [AM12], [AM14] e [AM16].

aproximação excelente para esta razão em seu trabalho *Medida do Círculo*.[34] Neste trabalho ele encontrou limites superiores e inferiores para esta razão ao circunscrever e inscrever um círculo com dois polígonos regulares de $n$ lados. A Figura 4.2 mostra circunferências de mesmo tamanho com figuras inscritas e circunscritas: triângulos, quadrados, pentágonos e hexágonos.

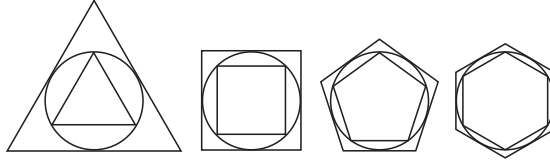



Figura 4.2: Circunferências com triângulos, quadrados, pentágonos e hexágonos inscritos e circunscritos.

É intuitivo que ao aumentar o número $n$ de lados dos polígonos, os perímetros dos dois polígonos se aproximam do valor do comprimento da circunferência entre eles. Ao inscrever e circunscrever uma circunferência com polígonos regulares de 96 lados, Arquimedes encontrou o seguinte resultado:[35]

> A razão da circunferência de qualquer círculo para seu diâmetro é menor do que $3\frac{1}{7}$ mas maior do que $3\frac{10}{71}$.

Matematicamente este teorema é representado da seguinte maneira:

$$3\frac{10}{71} < \frac{c}{d} < 3\frac{1}{7} \ . \tag{4.4}$$

A Equação (4.2) combinada com a Equação (4.4) fornece os seguintes limites para $\pi$ encontrados por Arquimedes:

$$3,1408 < \pi < 3,1429 \ . \tag{4.5}$$

Estes valores notáveis obtidos por Arquimedes para os limites da razão do comprimento de uma circunferência para seu diâmetro, com números tão simples e fáceis de lembrar como na Equação (4.4), são os mais famosos da antiguidade grega.

De acordo com Eutócio,[36] comentador de algumas obras de Arquimedes que nasceu ao redor de 480 d.C., o próprio Arquimedes considerava esses limites como resultados úteis para serem usados no dia a dia.[37] Em 1896 R. Schöne descobriu em Constantinopla um manuscrito do século 11 ou 12 contendo uma obra até então desconhecida do matemático Heron de Alexandria, a *Métrica*.[38] Heron

[34] *Measurement of a Circle*, [Arc02b, págs. 91-98].
[35] [Hea81a, Approximations to the value of $\pi$, págs. 232-235], [Hea81b, Measurement of a Circle, págs. 50-56], [Arc02b, *Measurement of a Circle*, Proposição 3, pág. 93], [Ass08, pág. 28] e [Ass10, pág. 32].
[36] [Hea81b, Eutocius, págs. 540-541].
[37] [Hea81a, pág. 234].
[38] [Hea81b, págs. 299, 308 e 317].

viveu provavelmente no século I d.C., pouco sabendo-se sobre sua vida.[39] Nesse trabalho Heron cita aproximações mais precisas da circunferência de um círculo como obtidas por Arquimedes.[40] Em termos de frações teríamos provavelmente $211872/67441 < \pi < 195882/62351$. Em notação decimal essa aproximação de Arquimedes fica da seguinte forma:

$$3,1415904 < \pi < 3,1416016 \ . \tag{4.6}$$

Vemos então que Arquimedes obteve aproximações excelentes para o valor numérico de $\pi$.

Desde os matemáticos Eudoxo e Euclides era conhecido que a área de qualquer círculo é proporcional ao quadrado de seu diâmetro. O segundo teorema do livro XII da obra *Os Elementos* de Euclides afirma o seguinte:[41]

> Os círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros.

Considere os círculos 1 e 2 da Figura 4.1 com raios $r_1$ e $r_2$, diâmetros $d_1 = 2r_1$ e $d_2 = 2r_2$, além de áreas $A_1$ e $A_2$, respectivamente. Este teorema pode ser expresso matematicamente como segue:

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \ . \tag{4.7}$$

Arquimedes conseguiu ir além do que Eudoxo e Euclides haviam obtido. Do mesmo jeito que a circunferência pode ser aproximada pelo perímetro de polígonos regulares inscritos e circunscritos, a área de um círculo também é aproximada pela área dos polígonos inscritos e circunscritos. Quanto maior for o número de lados desses polígonos, melhor será a aproximação da área do círculo. Na Figura 4.3 mostramos um círculo e seis triângulos inscritos.

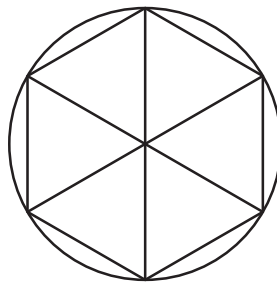



Figura 4.3: Círculo com seis triângulos inscritos.

[39] [Hea81b, Cap. XVIII: Mensuration: Heron of Alexandria, págs. 298-354], [Neu75, pág. 846] e [Neu83, págs. 1033-1034].

[40] [Hea81a, Approximations to the value of $\pi$, págs. 232-235] e [Hea81b, pág. 329].

[41] [Euc56b, Proposição 2, Livro XII] e [Euc09, pág. 528].

Ao aumentar indefinidamente o número de triângulos, diminuindo o comprimento de suas bases, encontra-se o resultado obtido por Arquimedes em seu trabalho *Medida do Círculo*:[42]

> Proposição 1: A área de qualquer círculo é igual a um triângulo retângulo no qual um dos lados ao redor do ângulo reto é igual ao raio, e o outro [lado é igual] à circunferência do círculo.

Este resultado está ilustrado na Figura 4.4.

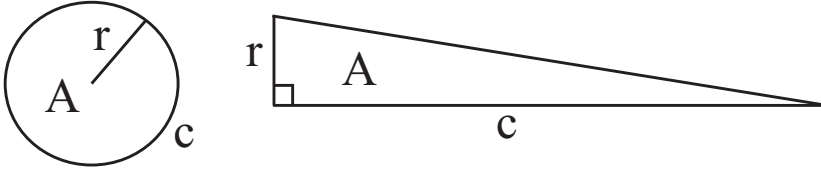



Figura 4.4: Arquimedes provou que o círculo de circunferência $c$ e raio $r$ possui a mesma área $A$ que um triângulo retângulo de lados $c$ e $r$.

Seja $A$ a área de um círculo de raio $r$ e comprimento $c$. Seja $A_T$ a área de um triângulo retângulo no qual os lados ao redor do ângulo reto são $r$ e $c$. O resultado obtido por Arquimedes em seu trabalho *Medida do Círculo* é representado atualmente pela seguinte fórmula:

$$A = A_T = \frac{c \cdot r}{2} \ . \tag{4.8}$$

Combinando as equações (4.2), (4.3) e (4.8) obtém-se a fórmula moderna para a área de um círculo, a saber:

$$A = A_T = \frac{c \cdot r}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2 \ . \tag{4.9}$$

Desde Eudoxo e Euclides também já se conhecia que o volume de uma esfera é proporcional ao cubo de seu diâmetro. A Proposição 18 do livro XII de *Os Elementos* de Euclides afirma o seguinte:[43]

> As esferas estão entre si em uma razão tripla da [razão] dos próprios diâmetros.

Considere duas esferas de raios $r_1$ e $r_2$, diâmetros $d_1 = 2r_1$ e $d_2 = 2r_2$, além de volumes $V_1$ e $V_2$, respectivamente. Este teorema pode ser expresso algebricamente da seguinte forma:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^3 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 \ . \tag{4.10}$$

[42] [Arc02b, pág. 91], [Ass08, pág. 28] e [Ass10, pág. 32].
[43] [Euc56b] e [Euc09, pág. 561].

Arquimedes foi além deste resultado. Da mesma forma que um círculo pode ser preenchido com triângulos, como mostrado na Figura 4.3, ele intuiu que uma esfera pode ser preenchida com cones partindo de seu centro e chegando na sua superfície. Na Figura 4.5 mostramos uma esfera e três cones internos.

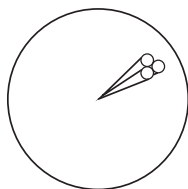



Figura 4.5: Uma esfera com três pequenos cones partindo de seu centro e chegando em sua superfície.

Podemos preencher totalmente a esfera com uma infinidade de cones partindo de seu centro e chegando na superfície da esfera, com a área da base de cada cone sendo infinitamente pequena, mas cuja soma será igual à área da superfície da esfera. Concluímos então que uma esfera de raio $r$ tem o mesmo volume que um cone de altura $r$ e base de área igual à área da esfera, Figura 4.6.

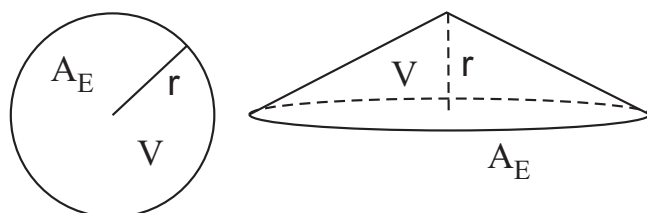



Figura 4.6: Uma esfera de raio $r$, área superficial $A_E$ e volume $V$ tem o mesmo volume que um cone de altura $r$ e base de área $A_E$.

Arquimedes sabia calcular o volume de um cone, desde que conhecesse sua altura e sua base. Logo a igualdade de volumes representada na Figura 4.6 indica que se ele conseguisse uma outra relação entre o volume de uma esfera e sua área superficial, conseguiria calcular separadamente a área e o volume da esfera. Ele obteve essa outra relação no trabalho *O Método* que estamos traduzindo nesse livro. Para chegar nessa outra relação utilizou a lei da alavanca.

Apenas a partir da obra *O Método* é que descobrimos como Arquimedes obteve o volume e a área de uma esfera utilizando a lei da alavanca. Mas os valores desse volume e dessa área já eram conhecidos de um outro trabalho escrito por ele e que nunca esteve totalmente perdido, a saber, *Sobre a Esfera e o Cilindro*. Nesse trabalho Arquimedes apresentou uma demonstração puramente geométrica do volume e da área da esfera, provando três resultados extremamente importantes, a saber:[44]

[44] [Arc02b, Livro I, Proposições 33 e 34, págs. 39-43], [Ass08, págs. 19-20] e [Ass10, pág.

Proposição 33: A superfície de qualquer esfera é quatro vezes seu círculo máximo.
Proposição 34: Qualquer esfera é igual a quatro vezes o cone que tem sua base igual ao círculo máximo da esfera e sua altura igual ao raio da esfera.
Corolário: Do que foi demonstrado segue-se que todo cilindro cuja base é o círculo máximo de uma esfera e cuja altura é igual ao diâmetro da esfera é 3/2 da esfera, e sua superfície juntamente com suas bases vale 3/2 da superfície da esfera.

Seja $A_E$ a área de uma esfera de raio $r$ e diâmetro $d = 2r$, sendo $A$ a área do círculo máximo da esfera (ou seja, a área de um círculo de raio $r$ passando pelo centro da esfera). A Proposição 33 de Arquimedes pode ser expressa algebricamente da seguinte maneira:

$$A_E = 4A \ . \tag{4.11}$$

As equações (4.9) e (4.11) fornecem o resultado moderno da área da esfera da seguinte maneira:

$$A_E = 4A = 4\pi r^2 \ . \tag{4.12}$$

A Proposição 34 pode ser representada pela Figura 4.7.

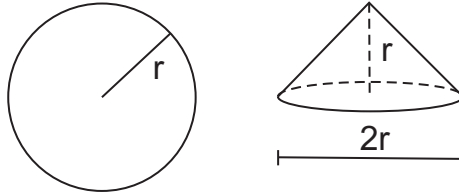



Figura 4.7: O volume de qualquer esfera é igual a quatro vezes o volume do cone que tem sua base igual ao círculo máximo da esfera e sua altura igual ao raio da esfera.

Seja $V$ o volume de uma esfera de raio $r$ e $V_{Cone}$ o volume de um cone que tem sua base igual ao círculo máximo da esfera e sua altura igual ao raio da esfera. Este teorema 34 pode ser expresso algebricamente da seguinte maneira:

$$V = 4V_{Cone} \ . \tag{4.13}$$

Desde Demócrito, Eudoxo e Euclides era conhecido que o volume de um cone é a terça parte do volume de um cilindro que tem a mesma base e a mesma altura.[45] A Proposição 10 do Livro XII de *Os Elementos* de Euclides prova o seguinte teorema:[46]

24].
[45] [Arc02a, pág. 13], [Ass08, pág. 34], [Ass10, pág. 39] e [Mag11, págs. 54 e 62].
[46] [Euc56b] e [Euc09, pág. 543].

> Todo cone é uma terça parte do cilindro que tem a mesma base que ele e altura igual.

Este teorema está ilustrado pela Figura 4.8.

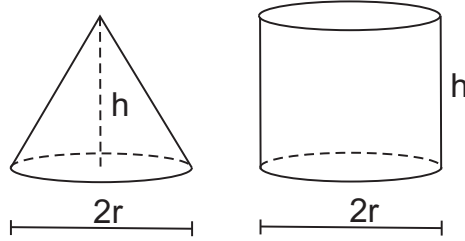



Figura 4.8: O volume de qualquer cone que tem como base um círculo de raio $r$ e uma altura $h$ é igual a um terço do volume do cilindro que tem a mesma base que ele e altura igual.

Seja $V_{Cil}$ o volume de um cilindro e $V_{Cone}$ o volume de um cone com mesma altura e base igual à do cilindro. Temos então:

$$V_{Cone} = \frac{1}{3} V_{Cil} \ . \tag{4.14}$$

As equações (4.13) e (4.14) fornecem o seguinte resultado:

$$V = 4V_{Cone} = \frac{4}{3} V_{Cil} \ . \tag{4.15}$$

Vamos agora considerar na Equação (4.15) que o cone e o cilindro possuem altura igual ao raio da esfera, $h = r$, tendo bases iguais ao círculo máximo da esfera, Figura 4.9.

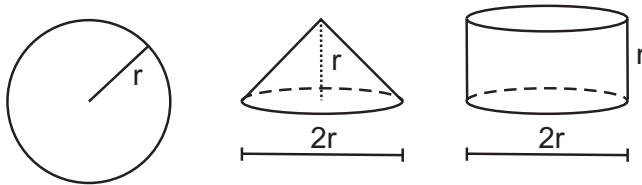



Figura 4.9: Uma esfera de raio $r$, um cone de altura $r$ e base igual ao círculo máximo da esfera, além de um cilindro de altura $r$ e base igual à do cone.

O volume do cilindro da Equação (4.15) com altura $r$ é a metade do volume do cilindro com altura $2r$ circunscrevendo a esfera de raio $r$, como mostrado na Figura 4.10.

Seja $V_{Cilindro\ circunscrito}$ o volume do cilindro que circunscreve uma esfera de raio $r$ e volume $V$. A Equação (4.15) pode então ser representada da seguinte forma:

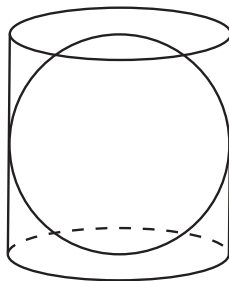



Figura 4.10: Esfera de raio $r$ com cilindro que a circunscreve, de altura $2r$ e base igual ao círculo máximo da esfera.

$$V = \frac{2}{3} V_{Cilindro\ circunscrito} \ . \tag{4.16}$$

Invertendo esta equação obtém-se o resultado que Arquimedes expressou em palavras no Corolário da Proposição 34 do Livro I de sua obra *Sobre a Esfera e o Cilindro*, a saber:

$$V_{Cilindro\ circunscrito} = \frac{3}{2} V \ . \tag{4.17}$$

Mas o volume do cilindro circunscrito à esfera é igual à sua base vezes a sua altura $h = 2r$. Da Equação (4.9) vem que a área da base deste cilindro é dada por $\pi r^2$. Com isto obtemos então que seu volume é dado por $\pi r^2 \cdot 2r$. Com este resultado na Equação (4.17) obtém-se:

$$V_{Cilindro\ circunscrito} = \frac{3}{2} V = \left(\pi r^2\right) \cdot (2r) \ . \tag{4.18}$$

Esta equação indica a maneira moderna de representar o volume $V$ da esfera de raio $r$, a saber:

$$V = \frac{2}{3} V_{Cilindro\ circunscrito} = \frac{2}{3} \left(\pi r^2\right) \cdot (2r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \ . \tag{4.19}$$

Vemos então que os resultados modernos mais importantes ligados ao círculo e à esfera são devidos a Arquimedes, a saber:

1. Aproximações excelentes para o limite superior e para o limite inferior da razão entre a circunferência $c$ de um círculo e seu diâmetro $d$, ou seja, $3\frac{10}{71} < \frac{c}{d} < 3\frac{1}{7}$. Hoje em dia essa relação pode ser expressa como $3,1408 < \pi < 3,1429$;

2. O comprimento $c$ de uma circunferência de raio $r$ é dado por $c = 2\pi r$;

3. A área $A$ de um círculo de raio $r$ é dada por $A = \pi r^2$;

4. A área $A_E$ de uma esfera de raio $r$ é dada por $A_E = 4\pi r^2$;

5. O volume $V$ de uma esfera de raio $r$ é dado por $V = 4\pi r^3/3$.

As provas das Proposições 33 e 34 de seu livro *Sobre a Esfera e o Cilindro* eram puramente geométricas. Foi apenas com a descoberta de seu trabalho *O Método* que se tornou conhecido como Arquimedes obteve originalmente estes resultados. Seu método heurístico utiliza a lei da alavanca, em uma combinação brilhante da física com a matemática. Este método será discutido na Seção 10.3.

# Capítulo 5

# As Obras de Arquimedes

Apresentamos aqui as obras de Arquimedes que chegaram até nós.[1] Elas são dispostas na ordem em que Heath supõe que foram escritas,[2] mesmo que existam muitas controvérsias sobre o assunto.[3]

- *Sobre o Equilíbrio dos Planos*. Livro I. Arquimedes deriva teoricamente usando o método axiomático a lei da alavanca e os centros de gravidade de paralelogramos, triângulos e trapézios.

- *Quadratura da Parábola*. Arquimedes encontra a área de um segmento de parábola formado pelo corte de uma corda qualquer. Ele apresenta duas demonstrações para este resultado. Na primeira faz uma quadratura mecânica, utilizando a lei da alavanca. Na segunda faz uma quadratura geométrica.

- *Sobre o Equilíbrio dos Planos*. Livro II. Arquimedes obtém o centro de gravidade de um segmento de parábola.

- *Sobre a Esfera e o Cilindro*. Livros I e II. Arquimedes mostra que a superfície de uma esfera é igual a quatro vezes a área do círculo maior passando pelo centro da esfera, encontra a área de qualquer segmento da esfera, mostra que o volume de uma esfera vale dois terços do volume do cilindro circunscrito e que a superfície da esfera vale dois terços da superfície do cilindro circunscrito, incluindo-se as bases. Na segunda parte deste livro o resultado mais importante de Arquimedes é mostrar como cortar uma esfera por um plano, tal que a razão dos volumes dos dois segmentos da esfera tenha um valor desejado.

- *Sobre as Espirais*. Arquimedes define uma espiral através do movimento uniforme de um ponto ao longo de uma reta que gira com velocidade angular constante no plano. Estabelece as propriedades fundamentais da

[1] [Ass08, Seção 2.1].
[2] [Arc02b, págs. xxxii-xxxiii].
[3] [Kno79b].

espiral relacionando o comprimento do raio vetor com os ângulos de revolução que geram as espirais. Apresenta resultados sobre tangentes às espirais. Demonstra como calcular áreas de partes da espiral. A espiral é utilizada para obter uma retificação da circunferência.

- *Sobre Conoides e Esferoides.* Arquimedes estuda os paraboloides de revolução, os hiperboloides de revolução (conoides) e os elipsoides (esferoides) obtidos pela rotação de uma elipse em torno de um de seus eixos. O principal objetivo do trabalho é investigar o volume de segmentos destas figuras tridimensionais. Demonstra, por exemplo, nas Proposições 21 e 22, que o volume do paraboloide de revolução vale $3/2$ do volume do cone que tem a mesma base e a mesma altura. Resultados análogos, porém mais complexos, são obtidos para o hiperboloide de revolução e para o elipsoide.

- *Sobre os Corpos Flutuantes.* Livros I e II. Arquimedes estabelece os princípios fundamentais da hidrostática com a lei do empuxo, dando o peso de um corpo imerso em um fluido. Estuda também a estabilidade de um segmento esférico flutuante e de um paraboloide de revolução imerso em um fluido.

- *Medida do Círculo.* Este trabalho não chegou em sua forma original até nós sendo, provavelmente, apenas um fragmento de um trabalho maior. Arquimedes demonstra que a área do círculo é igual à área do triângulo retângulo tendo por catetos o raio e a circunferência retificada. Arquimedes mostra ainda que o valor exato da razão da circunferência para o diâmetro de um círculo qualquer situa-se entre $3\frac{10}{71} \approx 3,1408$ e $3\frac{1}{7} \approx 3,1429$. Obteve este resultado circunscrevendo e inscrevendo um círculo com polígonos regulares de 96 lados.

- *O Contador de Areia.* Arquimedes lida com o problema de contar os grãos de areia contidos na esfera das estrelas fixas, usando resultados de Eudoxo, de seu pai Fídias e do astrônomo Aristarco (aproximadamente 310-230 a.C.). Propõe um sistema numérico capaz de expressar números até o equivalente moderno de $8 \times 10^{63}$. É neste trabalho que Arquimedes menciona que a adição das ordens dos números (o equivalente de seus expoentes quando a base é $10^8$) corresponde a achar o produto dos números. Este é o princípio que levou à invenção dos logaritmos, muitos séculos depois.

- *Stomachion.* Só sobraram fragmentos deste trabalho, em particular no palimpsesto de Arquimedes. Aparentemente ele é um jogo tipo tangram mas com 14 partes que se juntam para formar um quadrado. Ver alguns exemplos na Figura 5.1. Provavelmente Arquimedes se preocupou em resolver o problema de quantas formas estas 14 partes podem ser juntadas para formar novamente o quadrado. Para Netz e Noel este trabalho dá início ao cálculo combinatório.[4] De acordo com estimativas modernas

[4] [NN09, págs. 62-65 e Capítulo 10] e [NN07a, págs. 329-366].

existem 17.152 maneiras diferentes de combinar as peças do *Stomachion* formando o quadrado.[5]

Figura 5.1: Duas configurações possíveis para o *Stomachion* de Arquimedes.

- *Método sobre os Teoremas Mecânicos.* Este trabalho é apresentado neste livro.

Além dessas obras, sabe-se ainda que Arquimedes escreveu outras que atualmente existem apenas em fragmentos, em alguns casos temos apenas menções escritas por outros autores ou simplesmente seus títulos. Estas obras são as seguintes (títulos ou assuntos de que tratam):

- *O Problema Bovino.*
- *Livro de Lemas.*
- *Poliedros Semi-Regulares.*
- *Área do Triângulo.*
- *Sobre o Heptágono em um Círculo.*
- *Elementos de Mecânica.*

## 5.1 Obras de Arquimedes Traduzidas para o Português

Listamos nesta Seção as obras de Arquimedes que já foram traduzidas para o português.

- *Sobre o Equilíbrio dos Planos.* Livro I.[6] Livro II.[7]
- *Sobre os Corpos Flutuantes.* Livro I.[8] Livro II.[9]
- *O Contador de Areia.*[10]
- *Método sobre os Teoremas Mecânicos.*[11]

Há ainda um texto pseudo-Arquimediano, ou seja, um texto de um autor anônimo escrevendo sob o nome de Arquimedes:

- Sobre os [corpos] incidentes em líquidos.[12]

[5] [NN09, págs. 64 e 266] e [NN07a, pág. 363].
[6] [Ass97] e [Arq08].
[7] [Arq04b].
[8] [Ass96].
[9] [Arq12].
[10] [Arq].
[11] [Arq04a] e [Mag11].
[12] [Arq14].

# Capítulo 6

# *O Método*: História de uma Obra Perdida

No tempo de Arquimedes, a cidade de Alexandria tinha poucos anos de vida, pois foi fundada por Alexandre o Grande em 331 a.C. e foi governada a partir do ano 305 por Ptolomeu I Sóter (367-283 a.C.). Ptolomeu I foi general e amigo de Alexandre. Ele fundou a dinastia que reinou sobre o Egito até os tempos de Cleópatra. Sob o reinado de Ptolomeu I e de seus descendentes, a cidade de Alexandria conheceu um período de grande esplendor e tornou-se não somente a capital do Egito, mas também o centro da cultura grega. Foram construídos o Templo das Musas (Museu), o Templo de Serápis, uma nova divindade criada para estimular o sincretismo religioso entre a religião egípcia e a grega, e muitos outros monumentos típicos de uma cidade jovem em pleno florescimento.

Foi aqui, na Biblioteca de Alexandria, sob o comando de Ptolomeu I e de seu filho, que começou a ser feito sistematicamente o registro de todo o conhecimento humano, comprando ou copiando as obras produzidas em todo o mundo então conhecido. Aqui chegaram a ser arquivados de 400.000 a 1.000.000 de rolos de papiro. O fragmento de um papiro contendo a representação geométrica da Proposição 5 do Livro II da obra *Os Elementos* de Euclides encontra-se na Figura 6.1.

Eratóstenes, matemático e astrônomo grego, amigo de Arquimedes, foi curador da Biblioteca de Alexandria durante grande parte de sua vida.

"Arquimedes para Eratóstenes, saudações..." Assim começa a carta enviada por Arquimedes ao amigo matemático e que contém o *Método sobre os Teoremas Mecânicos*. Sabemos que o papiro contendo a carta de Arquimedes para Eratóstenes chegou em Alexandria porque temos provas de que nesta cidade a carta foi lida e copiada. No século I d.C., Heron de Alexandria escreveu um tratado chamado *Métrica* onde diz que:[1]

> O mesmo Arquimedes mostra no mesmo livro [*O Método*] que, se forem introduzidos em um cubo dois cilindros cujas bases são tangentes às faces

[1] [NN09, págs. 77-78] e [NN07b, pág. 105].

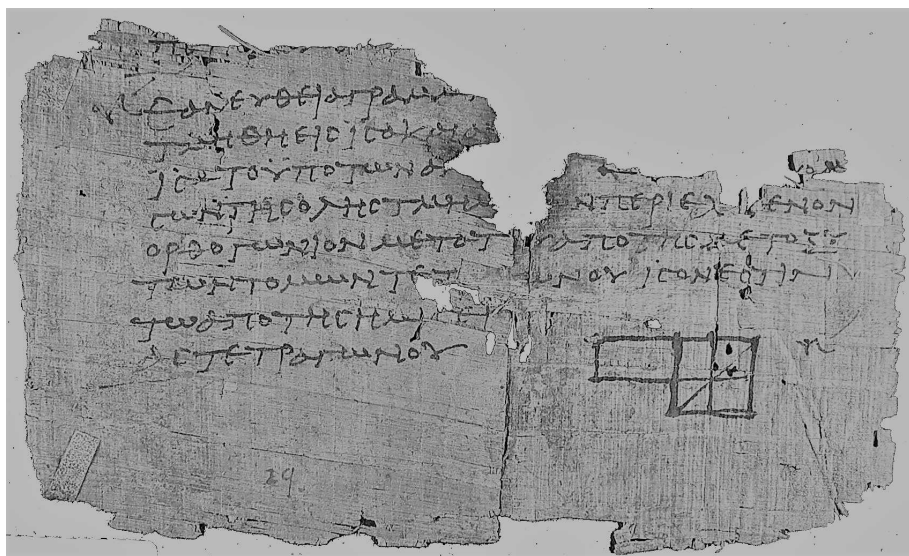



Figura 6.1: Fragmento de um papiro.

> do cubo, o segmento comum dos cilindros será de dois terços do cubo. Isso é útil para abóbadas construídas dessa maneira...

Heron parecia interessado na construção de uma cúpula de um templo com o formato de dois cilindros entrelaçados. O exemplo de uma dessas cúpulas aparece na Figura 6.2. O seu relato confirma as palavras de Arquimedes na carta para Eratóstenes, de que seus trabalhos seriam úteis para a posteridade.

Mas a tecnologia do papiro, onde estavam registradas as cartas de Arquimedes, acabou entre o I e o IV século, sendo substituída pelo pergaminho como suporte da escrita comum. O pergaminho tem seu nome ligado à cidade de Pérgamo na Ásia Menor, onde aparentemente foi desenvolvido e é obtido de peles de animais tratadas por um processo químico. Além de ter maior resistência mecânica e ao tempo que o papiro, o pergaminho tem uma vantagem adicional: por ser muito mais flexível ele pode ser dobrado.

Descobriu-se assim a técnica de juntar quatro pergaminhos dobrados, um dentro do outro, formando o chamado "quaternum" (constituindo, portanto, um conjunto de oito folhas) que, colocados um sobre o outro, vieram a constituir o "códice". O códice (ou "códex") como era chamado na época, e o "quaternum" (caderno) ainda constituem a estrutura física dos livros de hoje, simplesmente substituindo o pergaminho pelo papel. Os antigos papiros que não passaram para uma transcrição em pergaminho estão quase todos desaparecidos.

O fato de Arquimedes ter sido famoso já na sua época, não garantiria a sobrevivência de sua obra nesta passagem, pois a prioridade era certamente mais voltada para os clássicos como Homero, Aristóteles ou Euclides, cujos trabalhos tinham interesse mais amplo.

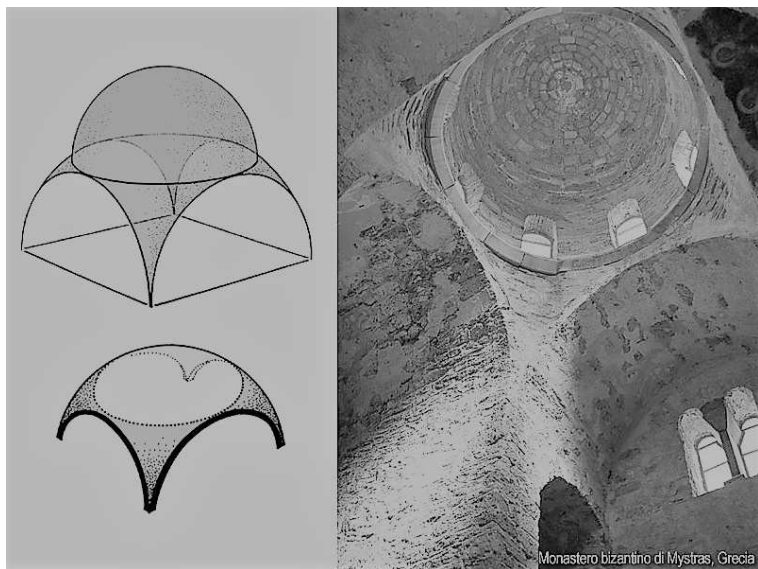



Figura 6.2: Cúpula de um templo antigo.

Uma das pessoas que garantiram a chegada das obras de Arquimedes até nossos dias foi Eutócio. Sabemos bem pouco sobre a vida de Eutócio, exceto que nasceu em 480 d.C. na cidade de Ascalona e que passou algum tempo em Alexandria, onde teve contato com os trabalhos de Arquimedes.[2] Seu interesse pela obra do matemático grego foi tão grande que ele iniciou uma empreitada para procurar, reunir e comentar todo o material que conseguisse encontrar de Arquimedes. Eutócio conseguiu editar vários tratados de Arquimedes junto com seus próprios comentários, usando a nova tecnologia do pergaminho, garantindo assim a sobrevivência das ideias de Arquimedes.

Foi pelo interesse de Eutócio, assim como de seus amigos Antêmio de Trales (474-534 d.C.) e Isidoro de Mileto (480-540 d.C.), que as obras de Arquimedes chegaram até nossos dias a partir de Constantinopla (hoje Istambul).

Constantinopla, assim chamada posteriormente, era a antiga cidade grega de Bizâncio, que foi designada pelo imperador Constantino para ser a capital do Império Romano de Oriente. Ela viveu um período de crescimento e esplendor durante mais de 400 anos. Seus imperadores demonstraram interesse não somente pelo aspecto militar, mas também pela religião e pela cultura.

Foi assim que o imperador Justiniano determinou a construção da igreja de Santa Sofia (532-537 d.C.) aos arquitetos Antêmio de Trales e Isidoro de Mileto: o resultado é uma obra que ainda hoje é considerada uma das grandes maravilhas do mundo.

Antêmio, Isidoro e Eutócio, além de terem tido os mesmos mestres em Ale-

[2] [Hea81b, Eutocius, págs. 540-541].

xandria,[3] também tinham em comum a grande admiração por Arquimedes que transmitiram a seus discípulos, permitindo assim a continuidade do conhecimento do grande mestre, seja nas questões teóricas, seja nos aspectos práticos.

É por esse motivo que o interesse nas obras de Arquimedes em Constantinopla permaneceu por muito tempo. As suas cartas foram reunidas e copiadas várias vezes até o século IX, dando origem aos chamados *Códice A, Códice B* e *Códice C*.[4]

O *Códice A* continha a maior parte dos tratados de Arquimedes, os *Comentários* de Eutócio e a obra *Sobre as Medidas* de Heron de Alexandria. Ele desapareceu no século XVI. Por sorte, antes de desaparecer, foram feitas várias cópias e traduções, de modo que o seu conteúdo chegou até nossos dias. O *Códice A* não continha o tratado *Sobre os Corpos Flutuantes*, nem *O Método*.[5]

As pistas do *Códice B* também se perderam na idade média. Porém, antes de seu desaparecimento, foi feita uma tradução em latim por Guilherme de Mörbeke em 1269, da qual ainda existem cópias. O *Códice B* contém, além dos *Comentários* de Eutócio, as seguintes obras de Arquimedes:

*Sobre as Espirais.*
*Sobre o Equilíbrio dos Planos.*
*Quadratura da Parábola.*
*Medida do Círculo.*
*Sobre a Esfera e o Cilindro.*
*Sobre Conoides e Esferoides.*
*Sobre os Corpos Flutuantes.*

O *Códice C* permaneceu desaparecido até 1906. Devemos a sua descoberta ao filólogo dinamarquês Johan Ludvig Heiberg que dedicou grande parte de sua vida à pesquisa, tradução e publicação das obras de Arquimedes. Entre 1880 e 1881 ele havia publicado a primeira edição moderna de toda a obra de Arquimedes conhecida até aquela época.[6]

Em 1906 descobriu[7] em Constantinopla um manuscrito com duas escritas sobrepostas (palimpsesto). A escrita superior era um livro de orações do século XIII e a inferior, parcialmente raspada que servia de base ao livro, continha textos de matemática do século IX ou X.

Heiberg reconheceu no texto mais antigo e quase apagado a obra de Arquimedes. Ele conseguiu decifrar a maior parte do palimpsesto, encontrando vários fragmentos das seguintes obras:

*Sobre a Esfera e Cilindro.*
*Sobre as Espirais* (quase completo).
*Medida do Círculo.*

[3] [Mug72, pág. 1].
[4] [Arc02b, Cap. 2, págs. xxiii-xxxviii], [Arc02a], [Dij87, Cap. 2, págs. 33-49] e [Net11].
[5] [Mug70, pág. xxiv].
[6] [Hei81].
[7] [Dij87, pág. 44].

*Sobre o Equilíbrio dos Planos.*

Mas a extraordinária importância deste documento é que representa a única fonte em grego de:

*Sobre os Corpos Flutuantes I, II* (quase completo).
*Stomachion* (as duas primeiras Proposições).
*Método sobre os Teoremas Mecânicos.*

Em seguida, na época da II Guerra Mundial, o palimpsesto desapareceu novamente para voltar à luz somente em 1998 quando foi leiloado em Nova York. O trabalho de transcrição dos seus textos gregos foi completado pela equipe multidisciplinar coordenada pelo museu Walters, de Baltimore (Estados Unidos).[8] Com os recursos e as tecnologias existentes hoje foi possível conseguir uma interpretação do texto mais completa do que aquela obtida por Heiberg. Com os escassos recursos de 100 anos atrás, ele foi obrigado a deixar muitas lacunas no texto e eventualmente induzido a interpretações incorretas do mesmo.

O nosso interesse está dirigido para o tratado: *Método sobre os Teoremas Mecânicos de Arquimedes para Eratóstenes.* Embora o texto matemático do palimpsesto tenha sido copiado no século IX ou X, só se conheciam citações muito superficiais sobre *O Método* feitas por Theodosius (aproximadamente 160-90 a.C.) e Heron de Alexandria (provavelmente século I d.C.).[9] Mas não se conhecia o próprio texto desta obra fundamental de Arquimedes. Pode-se então afirmar que ela tenha ficado perdida por aproximadamente 2.000 anos, até sua descoberta e publicação por Heiberg!

Em 1907 Heiberg publicou o texto original em grego, com tradução para o alemão, da carta de Arquimedes para Eratóstenes contendo *O Método*.[10] Entre 1910 e 1915 publicou uma nova edição completa das obras de Arquimedes em grego e latim, a partir da qual foram feitas traduções em diversas línguas.[11]

A grande importância dada à carta de Arquimedes para Eratóstenes reside no fato de que é um dos poucos tratados (talvez até mesmo o único) em que algum cientista da antiguidade revela o seu método de indução físico-matemática usado para chegar a determinadas conclusões.

Por suas obras Arquimedes é considerado por muitos como o pai da física matemática. Em seu trabalho *O Método*, perdido por tanto tempo, ele mostra o íntimo relacionamento entre essas duas ciências e como extrair dele o melhor aproveitamento.

[8] [NNWT11a] e [NNWT11b].
[9] [Neu75, pág. 846] e [Neu83, págs. 1033-1034].
[10] [Hei07], [HZ07], [Arc63], [Ass08, pág. 33] e [Arc11c].
[11] [Hei15], [Arc11a] e [Arc11b].

# Capítulo 7

# Os Princípios Físicos de *O Método*

A linguagem de Arquimedes não tem nada de simples. Para conseguir uma melhor compreensão da mesma é necessário ter presente alguns conceitos e leis da física por ele descobertos, que ainda hoje usamos como base do nosso conhecimento de mecânica e hidrostática. Apresentamos inicialmente o conceito do centro de gravidade (CG) e a lei da alavanca.

## 7.1 O Centro de Gravidade

### 7.1.1 Definição do Centro de Gravidade

Nosso conhecimento sobre o conceito do centro de gravidade deriva essencialmente das obras de Arquimedes. Por suas observações e estudos teóricos, ele desenvolveu uma metodologia tanto para a sua determinação experimental quanto matemática. Com isso foi possível dar um tratamento sistemático às condições de equilíbrio dos corpos.

Arquimedes não fala em "Centro de Gravidade" mas em "Centro do Peso." Porém, no intuito de deixar a leitura mais fácil, neste livro usaremos somente a locução usual "Centro de Gravidade."

Apesar disto, infelizmente não é possível encontrar nas obras de Arquimedes que chegaram até nossos dias, uma definição clara do centro de gravidade ou, como ele costumava chamar, centro do peso. Mas por uma análise de suas obras ainda existentes e segundo os autores que estudaram seus trabalhos, pode-se concluir que este conceito seria definido da seguinte maneira:[1]

> O centro de gravidade de um corpo rígido é um ponto tal que, se for concebido que o corpo está suspenso por este ponto, tendo liberdade para

[1] [Hea81b, págs. 24, 301, 350-351 e 430], [Dij87, págs. 17, 47-48, 289-304, 315-316, 321-322 e 435-436], [Arc02b, págs. clxxxi-clxxxii] e [Ass08, págs. 90-91 e Capítulo 6, págs. 121-132].

girar em todos os sentidos ao redor deste ponto, o corpo assim sustentado permanecerá em repouso e preservará sua posição original, qualquer que seja sua orientação inicial em relação à Terra.

### 7.1.2 Determinação Experimental do Centro de Gravidade

A partir do que encontramos em suas obras, podemos concluir que Arquimedes tinha conhecimento de uma maneira experimental para a determinação do centro de gravidade. Em sua obra *Quadratura da Parábola* afirmou o seguinte:[2]

> Todo corpo, suspenso por qualquer ponto, assume um estado de equilíbrio quando o ponto de suspensão e o centro de gravidade do corpo estão ao longo de uma mesma linha vertical; pois esta proposição já foi demonstrada.

Infelizmente a prova desta afirmação não chegou até nós. De qualquer forma, esta Proposição fornece um procedimento experimental para se encontrar o centro de gravidade de um corpo rígido. Inicialmente suspende-se o corpo por um ponto $P_1$ tal que o corpo tenha liberdade para girar ao redor deste ponto. Ele é solto do repouso em uma orientação arbitrária em relação ao solo, ficando sob a ação gravitacional terrestre. Aguarda-se que o corpo atinja o equilíbrio, ou seja, que fique em repouso em relação ao solo. Com o auxílio de um fio de prumo é traçada uma vertical passando por $P_1$ até a extremidade $E_1$ do corpo, Figura 7.1.

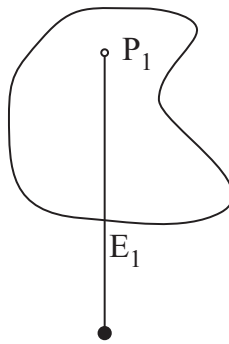



Figura 7.1: Utiliza-se um fio de prumo para traçar a vertical ligando um ponto de suspensão $P_1$ até a extremidade $E_1$ do corpo.

Suspende-se o corpo por um outro ponto $P_2$ que não esteja ao longo desta primeira vertical $P_1E_1$. Ele é novamente solto do repouso em uma orientação arbitrária. Aguarda-se que o corpo atinja o equilíbrio. Com o auxílio do fio de prumo traça-se uma segunda vertical passando por $P_2$ até a extremidade $E_2$ do corpo. O cruzamento das duas verticais é o centro de gravidade do corpo, Figura 7.2.

[2] [Mug71a, pág. 171] e [Ass08, pág. 122].

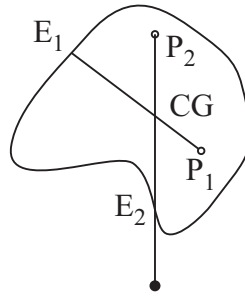



Figura 7.2: O cruzamento de duas verticais é o centro de gravidade (CG) do corpo.

### 7.1.3 Determinação Teórica do Centro de Gravidade

Na obra de Arquimedes que chegou até nós encontramos vários resultados teóricos relacionados com o centro de gravidade de figuras geométricas filiformes, planas e volumétricas.[3]

Para chegar nestes resultados Arquimedes utilizou essencialmente os seguintes princípios:

1. Princípios de simetria.

2. O famoso sexto postulado da obra *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, citado a seguir.

3. O método sobre os teoremas mecânicos.

A seguir discutimos brevemente cada um destes princípios.

Princípio 1. Como exemplo de um princípio de simetria temos a primeira parte do primeiro postulado da obra *Sobre o Equilíbrio dos Planos*:[4]

> Postulamos que grandezas iguais se equilibram a distâncias iguais.

Ou seja, se temos uma alavanca com dois corpos de mesmo peso apoiados sobre os pontos $A$ e $B$ da alavanca, ela vai ficar em equilíbrio com o fulcro localizado sobre um ponto $C$ da alavanca tal que $AC = CB$.

Princípio 2. O sexto postulado da obra *Sobre o Equilíbrio dos Planos* afirma o seguinte:[5]

> Se grandezas se equilibram a certas distâncias, então grandezas equivalentes a estas grandezas se equilibrarão, por sua vez, nas mesmas distâncias.

---

[3] Ver [Ass08, Seção 6.2, Resultados Teóricos sobre o Centro de Gravidade Obtidos por Arquimedes].

[4] [Arq08, pág. 222].

[5] [Arq08, pág. 223].

O significado deste postulado foi esclarecido por Vailati, Toeplitz, Stein e Dijksterhuis.[6] O ponto principal, que concorda com a maneira implícita com que Arquimedes utiliza este postulado em suas demonstrações, é que por "grandezas equivalentes," ele quer dizer "grandezas de mesmo peso." E por "grandezas a certas distâncias," ele quer dizer "grandezas cujos centros de gravidade estão às mesmas distâncias do fulcro da alavanca."

Em particular, vamos supor que temos vários corpos em equilíbrio sobre uma alavanca. Vamos chamar um destes corpos de $A$. Este postulado afirma que se pode substituir este corpo $A$ por um outro corpo $B$, sem afetar o equilíbrio da alavanca, desde que duas condições sejam satisfeitas: (I) O peso de $B$ tem de ser igual ao peso de $A$. (II) A distância do centro de gravidade de $B$ até o fulcro da alavanca tem de ser igual à distância que havia entre este fulcro e o centro de gravidade de $A$.

Em seu trabalho *Sobre o Equilíbrio dos Planos* Arquimedes usa este postulado para demonstrar, entre outras coisas, a lei da alavanca e para obter o centro de gravidade de um triângulo.[7] Este postulado também é utilizado implicitamente por Arquimedes na demonstração de vários teoremas de *O Método*, como discutiremos no Capítulo 10.

Princípio 3. Este princípio corresponde ao próprio *Método* de Arquimedes, o qual será explicado e ilustrado detalhadamente ao longo deste trabalho. É o método que ele utilizou para calcular a área, o volume e o centro de gravidade de algumas figuras geométricas. Nas Seções 10.2, 10.3 e 10.6, por exemplo, discutimos a aplicação deste método para a obtenção da área de um segmento parabólico, do volume de uma esfera e do centro de gravidade de um segmento de paraboloide de revolução.

## 7.2 A Lei da Alavanca

Ao falar sobre alavancas é conveniente lembrar alguns conceitos e definições:[8]

A alavanca consiste em um corpo rígido, geralmente linear e horizontal, capaz de girar ao redor de um eixo horizontal fixo em relação à Terra. Este eixo de rotação é normalmente ortogonal à barra da alavanca. O ponto em que o eixo toca a alavanca é chamado de *fulcro* da alavanca. Este é também o ponto de sustentação da alavanca. Uma alavanca está em equilíbrio quando sua haste ou travessão fica em repouso em relação à Terra, na horizontal. Chamamos de braço da alavanca à distância horizontal entre o ponto de apoio de um corpo sobre o travessão e o plano vertical passando pelo fulcro.

Vamos supor que temos dois corpos ligados aos braços opostos de uma alavanca. O equilíbrio ocorre de acordo com a chamada lei da alavanca, que aqui

[6] Ver uma discussão detalhada e as referências relevantes em [Arq08, Subseção 9.7.1].

[7] Ver uma discussão detalhada destes pontos em [Ass08, Seção 9.7: A Demonstração da Lei da Alavanca Apresentada por Arquimedes e o Cálculo do Centro de Gravidade de um Triângulo].

[8] [Ass08, pág. 165].

lembramos nas palavras do próprio Arquimedes:[9]

> Grandezas comensuráveis se equilibram em distâncias inversamente proporcionais a seus pesos.
>
> Da mesma maneira, se grandezas são incomensuráveis, elas se equilibrarão em distâncias inversamente proporcionais às grandezas.

Ou seja, vamos supor que os corpos de pesos $P_A$ e $P_B$ estão em equilíbrio sobre uma alavanca, suspensos por seus centros de gravidade a distâncias $d_A$ e $d_B$ do fulcro $F$, Figura 7.3.

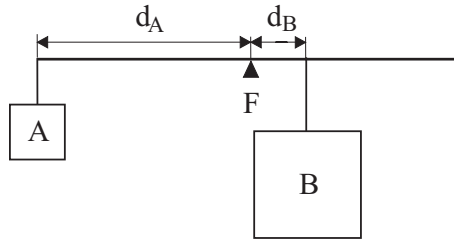



Figura 7.3: Alavanca em equilíbrio ao redor do fulcro $F$.

Esta lei pode ser expressa matematicamente, tanto para grandezas comensuráveis quanto incomensuráveis, afirmando que a alavanca vai estar em equilíbrio quando for satisfeita a seguinte relação:

$$\frac{d_A}{d_B} = \frac{P_B}{P_A} \ . \tag{7.1}$$

[9] *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Proposições 6 e 7, [Arq08, págs. 227 e 229].

# Capítulo 8

# Os Princípios Matemáticos de *O Método*

Os trabalhos de Arquimedes não são voltados a estudantes. Ele se dirigia aos grandes matemáticos e cientistas da época. Entre outros objetivos, escrevia para desafiar a compreensão de seus colegas contemporâneos ou mesmo para a posteridade, como escreveu na carta para Eratóstenes que contém *O Método*. Ele tinha razão. Mais de 700 anos depois de sua morte seus trabalhos eram estudados, traduzidos e aplicados, entre outros, pelos arquitetos Antêmio de Trales e Isidoro de Mileto. Eles usaram as bases estabelecidas por Arquimedes para determinar o volume do espaço delimitado pela interseção de dois cilindros ortogonais, na construção do que é considerado o mais belo exemplo da arquitetura bizantina: a cúpula da igreja de Santa Sofia em Istambul.

Para poder penetrar com maior facilidade no raciocínio de Arquimedes, é necessário lembrar alguns pontos fundamentais da matemática grega daquela época, dos quais vamos apresentar aqui apenas o essencial: a álgebra geométrica, a aplicação das áreas e a teoria das proporções.[1] Estas técnicas foram muito utilizadas nas demonstrações de *O Método*.

## 8.1 Álgebra Geométrica

A chamada álgebra geométrica (nomenclatura moderna) foi desenvolvida pelos matemáticos gregos antes de Arquimedes e reagrupada por Euclides no Livro II de *Os Elementos*. Ela fornece os recursos matemáticos que hoje são supridos pela álgebra, partindo porém, como diz o nome, de considerações geométricas.

A seguir apresentamos as primeiras Proposições que são as mais usadas em *O Método*, mostrando sua correspondência com as equações algébricas de hoje. A primeira proposição do Livro II de *Os Elementos* de Euclides afirma o seguinte:[2]

[1] [Dij87, págs. 51-54], [NN09, pág. 49], [NN07b, pág. 67] e [Arc02b, págs. xl-xlvii].
[2] [Euc09, pág. 135].

PROPOSIÇÃO 1 - Caso existam duas retas, e uma delas seja cortada em segmentos, quantos quer que sejam, o retângulo contido pelas duas retas é igual aos retângulos contidos tanto pela não cortada quanto por cada um dos segmentos.

Uma ilustração desta Proposição encontra-se na Figura 8.1. O lado BG do retângulo tem comprimento $a$, enquanto que o lado BC do retângulo está dividido por segmentos ortogonais a este lado em três partes cujos comprimentos são $b$, $c$ e $d$.

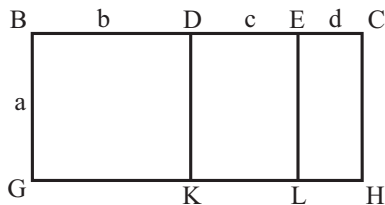



Figura 8.1: A Proposição 1 em forma geométrica.

Euclides demonstra geometricamente que a área do retângulo grande, $a(b+c+d)$, é igual à soma da área dos três retângulos menores, a saber, $ab+ac+ad$.

Esta Proposição 1 pode ser colocada em forma algébrica da seguinte maneira:

$$a(b+c+d+...) = ab+ac+ad+... \tag{8.1}$$

Já a segunda proposição do Livro II de *Os Elementos* de Euclides tem a seguinte redação:[3]

PROPOSIÇÃO 2 - Caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, o retângulo contido pela reta toda e cada um dos segmentos é igual ao quadrado sobre a reta toda.

Uma ilustração desta Proposição encontra-se na Figura 8.2. Euclides demonstra geometricamente que a área do retângulo de lados $a$ e $a+b$, juntamente com a área do retângulo de lados $b$ e $a+b$, é igual à área do quadrado de lado $a+b$.

Esta Proposição 2 pode ser colocada de forma algébrica da seguinte maneira:

$$(a+b)a+(a+b)b = (a+b)^2 \ . \tag{8.2}$$

Terceira proposição do Livro II de *Os Elementos* de Euclides:[4]

PROPOSIÇÃO 3 - Caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, o retângulo contido pela reta toda e por um dos segmentos é igual a ambos, o retângulo contido pelos segmentos e o quadrado sobre o predito segmento.

Uma ilustração desta Proposição encontra-se na Figura 8.3. Euclides demonstra geometricamente que a área do retângulo de lados $b$ e $a+b$ é igual à área do retângulo de lados $a$ e $b$, somada com a área do quadrado de lado $b$.

[3] [Euc09, pág. 136].
[4] [Euc09, pág. 137].

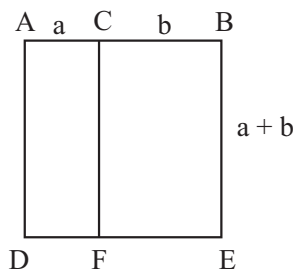



Figura 8.2: A Proposição 2 em forma geométrica.

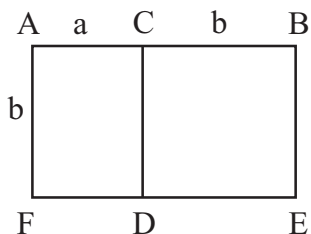



Figura 8.3: A Proposição 3 em forma geométrica.

Esta Proposição 3 pode ser colocada de forma algébrica da seguinte maneira:

$$(a+b)b = ab + b^2 \ . \tag{8.3}$$

Quarta proposição:[5]

> PROPOSIÇÃO 4 - Caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, o quadrado sobre a reta toda é igual aos quadrados sobre os segmentos e também duas vezes o retângulo contido pelos segmentos.

Uma ilustração desta Proposição encontra-se na Figura 8.4. Euclides demonstra geometricamente que a área do quadrado de lado $a + b$ é igual à soma de quatro áreas, a saber, o quadrado de lado $a$, o quadrado de lado $b$, e duas vezes o retângulo de lados $a$ e $b$.

Esta Proposição 4 pode ser colocada de forma algébrica da seguinte maneira:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \ . \tag{8.4}$$

Estes são apenas alguns exemplos de teoremas puramente geométricos que hoje em dia são expressos de maneira sucinta com a notação algébrica. As regras para manipular as grandezas algébricas foram criadas para reproduzir os teoremas geométricos.

[5] [Euc09, pág. 137].

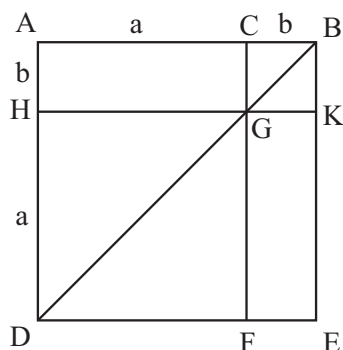



Figura 8.4: A Proposição 4 em forma geométrica.

## 8.2 Aplicação das Áreas

A descoberta do "método de aplicação das áreas" é atribuída à Escola Pitagórica, que floresceu na cidade de Crotona no VI século antes de Cristo, sob a orientação de Pitágoras (aproximadamente 580-500 a.C.). Portanto, esta descoberta ocorreu vários séculos antes de Euclides e Arquimedes. Este método é usado para comparar áreas de figuras geométricas que possuem formatos diferentes, fornecendo aos matemáticos gregos os recursos necessários para resolver, por meio da geometria, alguns tipos de equações que hoje tratamos por via algébrica.

O verbo grego $\pi\alpha\rho\alpha\beta\alpha\lambda\lambda\omega$ (*paraballo*) é usualmente traduzido por *aplicar* quando usado neste sentido. Contudo, para explicar a operação aqui realizada, achamos que o verbo *comparar*, que é um outro sentido de *paraballo*, pode ser mais útil na compreensão da ideia que existe por detrás desta palavra.

Um exemplo muito importante e nada trivial de comparação de áreas aparece na Proposição 35 do Livro I de *Os Elementos* de Euclides:[6]

> Os paralelogramos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si.

Essa Proposição pode ser ilustrada na Figura 8.5.

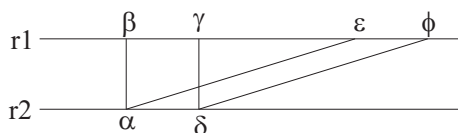



Figura 8.5: Os paralelogramos $\alpha\beta\gamma\delta$ e $\alpha\varepsilon\phi\delta$ possuem a mesma área.

[6] [Euc09, pág. 124].

Nessa figura temos duas retas paralelas, $r1$ e $r2$. Os paralelogramos $\alpha\beta\gamma\delta$ e $\alpha\varepsilon\phi\delta$ possuem a mesma base $\alpha\delta$. Por essa proposição conclui-se que eles possuem a mesma área. Esse resultado não é trivial, já que possuem formas distintas e perímetros diferentes.

No método de aplicação das áreas inicialmente compara-se um lado de um paralelogramo (geralmente um retângulo), com um segmento de reta dado. Primeiro junta-se uma extremidade do lado do paralelogramo com uma extremidade do segmento dado e verifica-se em que ponto termina o lado do paralelogramo. Se o vértice "livre" do retângulo cai antes da extremidade do segmento de reta considerado, temos um caso de "falta" ou "élleipsis" em grego (daí a origem da palavra elipse). Se há uma coincidência exata das duas extremidades, temos uma "aplicação" propriamente dita, ou "parabolé" (daí a origem da palavra parábola). Caso exista um excesso do lado do retângulo em relação ao segmento dado, temos um caso de "hiperbolé" (daí a origem da palavra hipérbole). Estes três casos estão ilustrados na Figura 8.6.

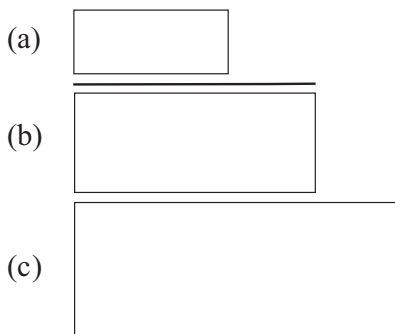



Figura 8.6: Os casos de aplicação das áreas. Comparação do lado superior de um retângulo com um segmento de reta dado, segmento este entre os dois retângulos superiores. (a) Aplicação com falta ou *élleipsis*. (b) Aplicação exata ou *parabolé*. (c) Aplicação com excesso ou *hiperbolé*.

Com esta introdução podemos agora compreender a origem das denominações de "elipse, parábola e hipérbole" dadas por Apolônio de Perga (aproximadamente 262-190 a.C.) às curvas cônicas que conhecemos hoje.[7] Com efeito, na sua dedução da equação da parábola, Apolônio, na interpretação de Heath, chega à seguinte conclusão:[8]

> Segue-se que o quadrado de qualquer ordenada [$y$] em relação a um certo diâmetro determinado $PM$ é igual ao retângulo *aplicado* ($\pi\alpha\rho\alpha\beta\acute{\alpha}\lambda\lambda\epsilon\iota\nu$)

[7] [Hea81b, Cap. XIV: B. Apollonius of Perga, págs. 126-196] e [Apo04].
[8] Ver [Apo04, Proposição 1, pág. 9], nossas palavras entre colchetes.

> à linha reta determinada $PL$ [$p$] traçada em ângulo reto com $PM$ [o diâmetro] e com altura igual à abscissa correspondente $PV$ [$x$]. Portanto, esta curva é chamada de *PARÁBOLA*.

Analogamente,[9] Apolônio deduz as equações da elipse (falta área na aplicação) e da hipérbole (excesso de área na aplicação). Seus resultados, em notação moderna, são apresentados pelas expressões seguintes nas quais $p$ e $d$ são constantes.[10]

No caso da parábola:

$$y^2 = px \; . \tag{8.5}$$

No caso da elipse:

$$y^2 = px - \frac{p}{d}x^2 \; . \tag{8.6}$$

No caso da hipérbole:

$$y^2 = px + \frac{p}{d}x^2 \; . \tag{8.7}$$

Um exemplo do método de aplicação das áreas pode ser considerado a seguir:[11] Dado um triângulo com área de 12 pés quadrados e uma linha reta cujo comprimento é 4 pés, dizemos que aplicamos à linha reta uma área igual àquela do triângulo, se tomamos o comprimento total de 4 pés e encontramos qual largura deve ter o paralelogramo para ser equivalente ao triângulo, isto é, para ter uma área igual à área do triângulo. Neste caso a largura do retângulo deve ser de 3 pés, tal que sua área seja de 12 pés quadrados, igual à área dada do triângulo.

Outros exemplos são encontrados em várias Proposições de *Os Elementos* de Euclides. A Proposição 44 do Livro I, por exemplo, afirma que:[12]

> Aplicar à reta dada, no ângulo retilíneo dado, um paralelogramo igual ao triângulo dado.

Sem entrar nos detalhes da demonstração geométrica que pode ser encontrada nas referências citadas, percebemos que com essa Proposição os matemáticos gregos podiam resolver equações lineares. Com efeito, vamos considerar o paralelogramo como sendo um retângulo, o segmento de reta dado como tendo um comprimento $a$ dado, e a área do triângulo (ou qualquer outra figura delimitada por linhas retas) como sendo dada por $\Delta$. Vamos ainda indicar por $x$ à largura que deve ter o retângulo para solucionar o problema, ou seja, tal que a área dada do triângulo seja igual à área do retângulo de comprimento dado. Podemos então escrever, em termos algébricos:

[9] Ver [Apo04, Proposições 2 e 3, págs. 9-12].
[10] Ver [Euc56a, Volume 1, págs. 343-345].
[11] Ver [Euc56a, Volume 1, pág. 343].
[12] [Euc09, pág. 130].

$$ax = \Delta \ . \tag{8.8}$$

Ou seja:

$$x = \frac{\Delta}{a} \ . \tag{8.9}$$

Como a Proposição 44 do Livro I de *Os Elementos* de Euclides permite determinar geometricamente o valor da variável $x$, podemos entender como os matemáticos gregos encontraram uma maneira de resolver equações de primeiro grau.

Similarmente, na Proposição 29, Livro VI, de *Os Elementos*, Euclides mostra como:[13]

> A uma dada linha reta *aplicar* um paralelogramo igual a uma dada figura retilínea,[14] e excedente por um paralelogramo semelhante a um (paralelogramo) dado.

Neste caso também não vamos detalhar a demonstração geométrica dessa Proposição, mas podemos ver como ela pode ser transformada em uma apresentação algébrica familiar, da seguinte maneira:

Sejam dados um segmento de reta com comprimento $a$ e uma figura de área $\Delta$. Consideramos por simplicidade que o paralelogramo a ser aplicado a este segmento de reta de comprimento $a$ seja um retângulo de lado $x$ e que o excedente seja um quadrado de lado $x$. Devemos então determinar a largura $x$ de um retângulo de modo que a soma das áreas do retângulo ($ax$) e do quadrado ($xx$) seja igual à área da figura dada. Então:

$$ax + x^2 = \Delta \ . \tag{8.10}$$

Ou seja:

$$x^2 + ax - \Delta = 0 \ . \tag{8.11}$$

Como a Proposição 29 do Livro VI de *Os Elementos* de Euclides permite determinar geometricamente o valor da variável $x$, percebemos como os matemáticos gregos encontraram uma maneira de resolver equações de segundo grau.

Pelo que foi exposto até aqui, podemos entender melhor as seguintes bases usadas pelos matemáticos gregos e por Arquimedes:[15]

- Toda área delimitada por linhas retas pode ser dividida em triângulos.
- Todo triângulo pode ser igualado à metade de um retângulo.
- Todo retângulo pode ser igualado a um quadrado.

[13] [Euc56a, Volume 2, pág. 262].

[14] O significado de figura retilínea ou ângulo retilíneo corresponde a "delimitado por linhas retas".

[15] [NN09, pág. 49] e [NN07b, pág. 67].

A combinação desses três princípios permite concluir que podemos medir qualquer área delimitada por linhas retas como uma soma de quadrados. Foi neste ponto que pararam os matemáticos gregos antes de Arquimedes.

Arquimedes foi um dos primeiros matemáticos a demonstrar a igualdade de áreas entre uma superfície delimitada por linhas curvas e uma outra superfície delimitada por linhas retas (triângulo, quadrado, retângulo ou outro polígono). Veremos exemplos disto a seguir, na tradução e comentários sobre *O Método*. Na primeira Proposição deste trabalho, por exemplo, ele obtém a área de um segmento parabólico em termos da área de um triângulo inscrito na parábola.

## 8.3 Teoria das Proporções

Já citamos em várias ocasiões a obra *Os Elementos* de Euclides. Nela encontramos reunido todo o conhecimento matemático grego daquela época, como foi possível verificar em alguns dos exemplos citados.

Para uma melhor compreensão da matemática de *O Método*, apresentamos a seguir, extraindo do Livro V de *Os Elementos*, alguns conceitos básicos da teoria das proporções com os seus equivalentes algébricos, que serão muito úteis posteriormente.[16]

### 8.3.1 Conceitos Fundamentais

Vamos lidar aqui com grandezas homogêneas $A$, $B$, $C$, ... Diz-se que duas grandezas $A$ e $B$ são homogêneas (ou que duas magnitudes $A$ e $B$ são do mesmo gênero) quando satisfazem ao axioma de Eudoxo, isto é, quando existem números naturais $m$ e $n$ tais que $mA > B$ e $nB > A$. Citamos aqui a definição 4 do Livro V de *Os Elementos*:[17]

> 4. Magnitudes são ditas ter uma razão entre si, aquelas que multiplicadas podem exceder uma a outra.

Exemplos de grandezas homogêneas $A$ e $B$: Dois comprimentos, duas áreas, dois volumes, dois pesos, dois ângulos, dois intervalos de tempo etc.

Já uma distância e uma área, por exemplo, não são grandezas do mesmo gênero. Suponha que temos uma distância $d = 5\ m$ e uma área $a = 3\ m^2$. Ou seja, $d$ e $a$ não podem ser comparadas, não há uma razão entre elas e não podemos dizer qual delas é maior do que a outra.

Citamos agora algumas operações entre grandezas do mesmo gênero.

#### Razão dupla

Sendo

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C}\ , \tag{8.12}$$

[16] [Dij87, pág. 52].
[17] [Euc09, pág. 205].

então temos:

$$\frac{A}{C} = \frac{A^2}{B^2} \ . \tag{8.13}$$

**Razão tripla**

Sendo

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D} \ , \tag{8.14}$$

então temos:

$$\frac{A}{D} = \frac{A^3}{B^3} \ . \tag{8.15}$$

**Razão composta**

Sendo

$$\frac{A}{B} = \frac{M}{N} \ , \tag{8.16}$$

e

$$\frac{B}{C} = \frac{P}{Q} \ , \tag{8.17}$$

então temos:

$$\frac{A}{C} = \frac{M \cdot P}{N \cdot Q} \ . \tag{8.18}$$

### 8.3.2 Operações Principais com Grandezas do Mesmo Gênero

Apresentamos em seguida as principais operações da teoria das proporções usadas nesse livro:[18]

A partir da proporção

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} , \tag{8.19}$$

podem ser obtidas outras proporções conhecidas pelos nomes dados a seguir.

*Permutando*:

$$\frac{A}{C} = \frac{B}{D} . \tag{8.20}$$

*Invertendo*:

$$\frac{B}{A} = \frac{D}{C} . \tag{8.21}$$

*Componendo*:

$$\frac{A+B}{B} = \frac{C+D}{D} . \tag{8.22}$$

*Separando*:

$$\frac{A-B}{B} = \frac{C-D}{D} , \tag{8.23}$$

desde que $A > B$ e $C > D$.

*Convertendo*:

$$\frac{A}{A-B} = \frac{C}{C-D} , \tag{8.24}$$

desde que $A > B$ e $C > D$.

Por combinação das operações anteriores temos também:

$$\frac{A+B}{A} = \frac{C+D}{C} , \tag{8.25}$$

$$\frac{B}{A-B} = \frac{D}{C-D} , \tag{8.26}$$

e

$$\frac{A-B}{A} = \frac{C-D}{C} . \tag{8.27}$$

As operações acima podem também ser usadas como desigualdades.

[18] [Dij87, págs. 52-54].

# Capítulo 9

# As Cônicas no Tempo de Arquimedes

## 9.1 Introdução

Conta a lenda que o povo de Atenas mandou uma delegação ao oráculo da cidade de Delfos para perguntar como poderia ser combatida uma epidemia de peste que dizimava a cidade. O oráculo respondeu que o altar do deus Apolo deveria ser duplicado. Acontece que o altar em questão tinha a forma de um cubo e os atenienses então construíram um outro altar de forma cúbica cujo lado era o dobro do primeiro... E a epidemia de Atenas continuou!

O "problema de Delfos" como ficou conhecido o problema proposto pelo oráculo, consiste na determinação do lado de um cubo cujo volume seja o dobro de um cubo dado. A solução deste problema, por via geométrica, manteve os matemáticos gregos ocupados por muito tempo.[1]

Atribui-se a descoberta das curvas cônicas ao matemático Menecmo (aproximadamente 380-320 a.C.) que, para encontrar uma solução do "problema de Delfos", abriu para a humanidade esta área da geometria que se demonstrou tão rica desde os seus primórdios.[2]

Depois de Menecmo os matemáticos gregos dedicaram-se intensivamente ao estudo destas curvas, até sua sistematização geral por parte de Apolônio, que desenvolveu uma abordagem tão completa do assunto que permaneceu praticamente inalterada até a era moderna. Com efeito, o seu livro *As Cônicas*, que chegou até nossos dias quase completo,[3] constitui a base de tudo o que conhecemos sobre o assunto.

[1] [Hea81a, Cap. VII: Special Problems — The Duplication of the Cube, or the problem of the two mean proportionals, págs. 244-270].

[2] Ver [Hea81a, Menaechmus, págs. 251-255], [Hea81b, Discovery of the conic sections by Menaechmus, págs. 110-116] e *Comentários de Eutócio de Ascalona ao Primeiro Livro do Tratado de Arquimedes: Sobre a Esfera e o Cilindro*, [Mug72, págs. 90-97].

[3] [Apo04].

Devemos porém observar que a visão que hoje temos das curvas cônicas difere profundamente da visão dos gregos. Os gregos não as consideravam como lugares geométricos, mas como seções de algum tipo de cone obtidas por planos definidos, sendo esta a origem do nome "seções cônicas".

Mesmo entre os gregos antigos, porém, as curvas cônicas eram obtidas de maneira diferente, dependendo do tipo de cone usado para a sua geração. Antes de Apolônio, os cones eram considerados como sólidos geométricos de uma só folha gerados pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos. Euclides, por exemplo, define um cone, seu eixo e sua base da seguinte maneira no Livro XI de *Os Elementos*, nossas palavras entre colchetes:[4]

> 18. Cone é a figura definida quando, um lado de um triângulo retângulo que está em volta do ângulo reto permanecendo fixo, o triângulo é girado até parar na mesma posição de onde começou a mover-se. E se a reta que ficou parada for igual àquela que deu a volta do ângulo reto, o cone será retângulo; se for menor, obtusângulo; se for maior, acutângulo.
>
> 19. E o eixo do cone é a reta que ficou fixa, em torno da qual o triângulo é girado.
>
> 20. E a base [do cone é] o círculo descrito pela reta que girou.

Os cones eram, portanto, classificados de acordo com o tipo de ângulo no vértice do cone, delimitado pelas geratrizes, em um corte por um plano contendo o eixo do cone.[5] Podemos ter cones com três tipos de ângulo no vértice, a saber, agudo, reto ou obtuso. É claro que com esse tipo de construção podemos obter somente cones circulares retos como mostrado na Figura 9.1.

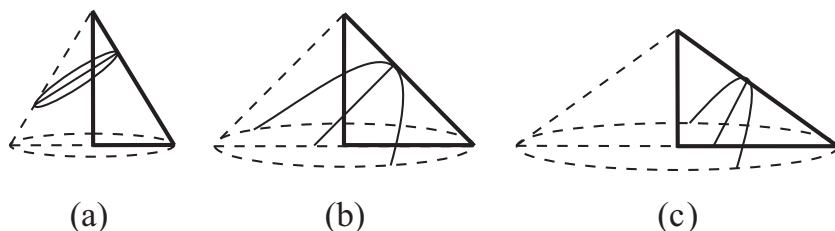



Figura 9.1: Construção das curvas cônicas segundo Menecmo. (a) Elipse em cone circular reto de ângulo agudo. (b) Parábola em cone circular reto de ângulo reto. (c) Hipérbole em cone circular reto de ângulo obtuso.

A partir destes cones, sempre cortando uma das geratrizes com um plano perpendicular a ela, eram obtidas as curvas cônicas. Estas cônicas recebiam as seguintes denominações dependendo do tipo de cone utilizado:

[4] [Euc08, pág. 425].

[5] Ver [Dij87, págs. 56-60]. A geratriz e o eixo de uma superfície de revolução podem ser definidos nas seguintes palavras, [San02, pág. 181]: "Uma superfície de revolução é uma superfície que pode ser obtida pela rotação de uma curva plana, chamada geratriz, em torno de uma reta fixa, chamada eixo (de revolução), no plano da referida curva."

| Denominação de Menecmo e Arquimedes: | Denominação moderna: |
| --- | --- |
| *Seção de cone de ângulo agudo ou oxítomo* | *Elipse* |
| *Seção de cone de ângulo reto ou ortótomo* | *Parábola* |
| *Seção de cone de ângulo obtuso ou amblítomo* | *Hipérbole.* |

Os termos *elipse*, *parábola* e *hipérbole*, como costumamos chamar hoje estas curvas, foram atribuídos a elas, posteriormente, por Apolônio, que as obteve da mesma maneira, mas com um procedimento diferente. Com efeito, Apolônio usava cones de base circular, mas os seus planos de corte apresentavam diferentes inclinações em relação às geratrizes. Quando o corte era feito com um plano paralelo a uma geratriz obtínhamos uma parábola. Cortando o cone com um plano que encontrava duas geratrizes, obtínhamos uma elipse. E quando o plano de corte encontrava uma geratriz e o prolongamento de outra, obtínhamos então uma hipérbole.

Não queremos fazer aqui uma análise mais profunda das diferenças entre estas duas maneiras de obtenção das curvas cônicas, pois isso foge aos objetivos desse trabalho, e também porque temos vários motivos para acreditar[6] que a visão que Arquimedes tinha das curvas cônicas fosse correspondente àquela de Menecmo.

É interessante porém citar aqui dois argumentos para consolidar este ponto de vista, que podem ser considerados entre os mais importantes:

- As denominações das curvas cônicas usadas por Arquimedes correspondem àquelas de Menecmo, e não às denominações de Apolônio (que são as denominações modernas). Ou seja, Arquimedes utilizava *seção de cone de ângulo agudo* no lugar de *elipse*, *seção de cone de ângulo reto* no lugar de *parábola*, e *seção de cone de ângulo obtuso* no lugar de *hipérbole*.

- As equações das curvas usadas por Arquimedes não são as equações de Apolônio, mesmo que em alguns casos haja coincidência.

Também os cilindros são obtidos no Livro XI de *Os Elementos* de Euclides pela rotação de um retângulo ao redor de um de seus lados:[7]

> 21. Cilindro é a figura definida quando, um lado de um paralelogramo retângulo que está em volta do ângulo reto, permanecendo fixo, o paralelogramo é girado até parar de novo na mesma [posição] de onde começou a mover-se.
>
> 22. E o eixo do cilindro é a reta fixa, em torno da qual o paralelogramo é girado.
>
> 23. E as bases [do cilindro são] os círculos descritos pelos dois lados opostos pelas retas que giraram.

[6] Ver [Dij87, pág. 63 - 65].
[7] [Euc08, pág. 425].

## 9.2 Definições

Nesta Seção apresentamos algumas definições da matemática grega,[8] relacionadas com *O Método*.

- O *lado* de um cone ou de um cilindro é uma de suas *geratrizes*.[9]
- O *eixo* de um cone é a linha reta traçada do vértice ao centro da base circular. O *eixo* de um cilindro é a linha reta traçada ligando os centros das bases circulares opostas.
- A *corda* é o segmento de reta que inicia e finda em dois pontos de uma curva.
- O *segmento no plano* é definido por Arquimedes como a área delimitada por uma curva e uma corda.
- A *base* do segmento no plano é a sua corda.
- O *segmento no espaço* é definido por Arquimedes como o volume delimitado por uma superfície de revolução e um plano.
- O *sintoma* de uma curva era o nome dado pelos matemáticos gregos à equação característica da curva.
- A *parábola* é definida por Arquimedes (da mesma maneira que Menecmo) como a seção de um cone reto de base circular, com ângulo no vértice também reto, obtida com um plano perpendicular a uma geratriz, Figura 9.2.

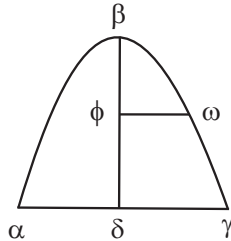



Figura 9.2: Parábola $\alpha\beta\gamma$ de base $\alpha\delta\gamma$ e diâmetro $\beta\delta$, com $\alpha\delta = \delta\gamma$, sendo $\beta$ o vértice da parábola. A ordenada em um ponto $\omega$ é o segmento $\omega\phi$ paralelo à base, enquanto que a abscissa associada a esta ordenada é o segmento $\beta\phi$.

- O *diâmetro* de uma parábola é somente o seu eixo de simetria,[10] Figura 9.2.

[8] [Arc02b, Capítulo VIII: A Terminologia de Arquimedes, págs. clv-clxxxvi] e [Apo04, Apêndice à Introdução - Notas sobre a Terminologia da Geometria Grega, págs. clvii-clxx].

[9] A geratriz e o eixo de uma superfície de revolução foram definidos na Nota de Rodapé 5, página 62 deste trabalho.

[10] De acordo com Heath, [Arc02b, Capítulo VIII: A Terminologia de Arquimedes, pág. clxvii].

- O *vértice* de uma parábola é o ponto de encontro do diâmetro com a curva, Figura 9.2.
- A *ordenada* é a linha traçada de um ponto da curva ao diâmetro, paralelamente à base, Figura 9.2.
- A *abscissa* associada a uma ordenada é o segmento de reta ao longo do diâmetro entre o vértice e o ponto em que a ordenada encontra o diâmetro, Figura 9.2.[11]
- O *parâmetro* das ordenadas de uma parábola (ou de outra cônica) é o segmento de reta ao qual é *aplicado* um retângulo de largura igual à abscissa para obter uma área igual à área do quadrado cujo lado é a ordenada.[12]
- Os eixos que chamamos de *eixo maior* e *eixo menor* de uma elipse eram chamados por Arquimedes de *diâmetro maior* e *diâmetro menor*, respectivamente. Qualquer um destes diâmetros ou eixos era chamado de *conjugado* do outro.
- A *tangente* é uma reta tocando uma curva em um ponto.
- A *subtangente* de uma parábola (ou de uma curva qualquer) em um ponto é a projeção sobre um eixo do segmento da tangente compreendido entre o ponto de tangência e o ponto onde a tangente encontra o eixo considerado, como está indicado na Figura 9.3.

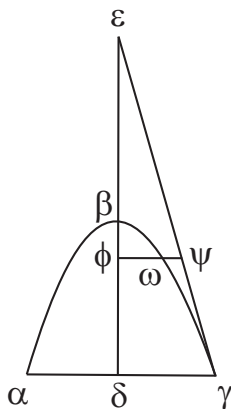



Figura 9.3: A subtangente é dada pelo segmento $\varepsilon\delta$.

Seja uma parábola $\alpha\beta\gamma$ e uma tangente $\gamma\varepsilon$ ao ponto $\gamma$, Figura 9.3. Neste caso a subtangente é dada pelo segmento $\varepsilon\delta$.

[11]Estas definições de *ordenada* e *abscissa* permitem construir um sistema de coordenadas com origem no vértice, com o eixo das abscissas no diâmetro da parábola e com o eixo das ordenadas ao longo da tangente à curva passando pelo vértice.

[12]Chamando o parâmetro de $p$, a abscissa de $x$ e a ordenada de $y$ teremos $y^2 = px$. Ver a Equação (8.5) na Seção 8.2. Em muitos textos, o *parâmetro* é identificado como *orthia* ($o\rho\theta\iota\alpha$), termo introduzido posteriormente por Apolônio.

## 9.3 Equações Características

Tendo sido feito um panorama geral das curvas cônicas, das denominações das grandezas a elas relacionadas, e de seu relacionamento com os cones e os planos geradores, podemos perceber com maior facilidade a dedução da equação característica (*sintoma*) de cada uma delas.

### 9.3.1 Parábola

Vamos usar a Figura 9.4 para deduzir a equação de uma parábola, tal como foi usada por Arquimedes nos seus livros. A parábola corresponde ao corte de um cone de ângulo reto no vértice $\tau$, por um plano passando por $\alpha$ perpendicularmente à geratriz $\tau\gamma$ do cone.

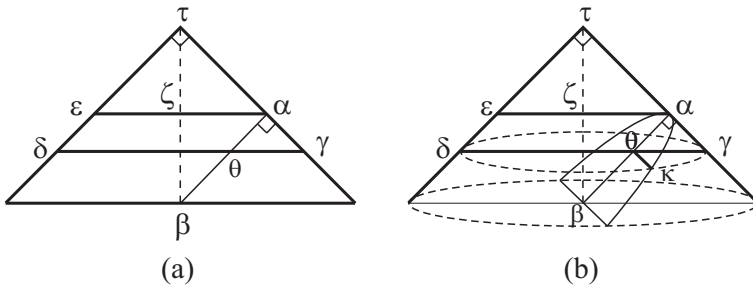



Figura 9.4: Construção de uma parábola de acordo com Menecmo. (a) Visão lateral. (b) Visão em perspectiva.

Na Figura 9.4 (a) o plano do papel contém as geratrizes do cone, $\tau\delta$ e $\tau\gamma$, assim como o eixo do cone, $\tau\beta$. O ângulo $\delta\tau\gamma$ é reto. Consideramos então um plano perpendicular a uma das geratrizes $\tau\gamma$ do cone, cortando-a no ponto $\alpha$. A curva determinada por este plano na superfície do cone é uma *parábola*, ou *seção de cone de ângulo reto* de acordo com Arquimedes, Figura 9.4 (b). O ponto $\alpha$ é chamado de vértice da parábola e o segmento $\alpha\beta$ ligando este vértice até o eixo do cone é o chamado *diâmetro* da parábola, que coincide com seu eixo de simetria. Temos que por construção $\alpha\beta$ é perpendicular à geratriz $\tau\gamma$.

Para determinar a equação característica desta curva, consideramos um ponto qualquer $\kappa$ sobre a mesma. Logo este ponto estará na superfície do cone. Por este ponto $\kappa$ traçamos um plano paralelo à base do cone, como mostrado na Figura 9.4. A interseção deste plano com o cone será então um círculo cujo diâmetro é $\gamma\delta$ e cujo ponto $\kappa$ está na circunferência, Figura 9.5.

Nestas condições o triângulo $\gamma\delta\kappa$ é um triângulo retângulo em $\kappa$. Seja traçada por $\kappa$ uma reta perpendicular ao diâmetro $\gamma\delta$ e cortando-o no ponto $\theta$. A reta $\theta\kappa$, perpendicular a $\gamma\delta$, é a perpendicular traçada a partir do ângulo reto para a hipotenusa.

A Proposição 8 do Livro VI de *Os Elementos* de Euclides afirma que:[13]

[13] [Euc09, pág. 240].

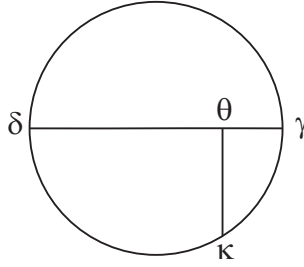



Figura 9.5: Vista superior do círculo paralelo à base do cone e passando por $\kappa$.

> Caso em um triângulo retângulo seja traçada uma perpendicular do ângulo reto até a base, os triângulos junto à perpendicular são semelhantes tanto ao todo quanto entre si.

O Corolário desta Proposição diz que:[14]

> A partir disso é claro que, se em um triângulo retângulo, for traçada uma perpendicular a partir do ângulo reto para a base, a [linha reta assim] traçada será uma média proporcional entre os segmentos da base.

Com este Corolário podemos estabelecer a seguinte igualdade:

$$Q(\theta\kappa) = R(\gamma\theta,\ \delta\theta)\ . \tag{9.1}$$

Com essa notação indica-se que o quadrado ($Q$) do segmento $\theta\kappa$ é equivalente ao retângulo ($R$) cujos lados são os segmentos $\gamma\theta$ e $\delta\theta$, isto é, este quadrado e este retângulo possuem áreas iguais. Ou seja, a Equação (9.1) também pode ser escrita da seguinte forma:

$$\theta\kappa \cdot \theta\kappa = \gamma\theta \cdot \delta\theta\ . \tag{9.2}$$

Pelo vértice $\alpha$ da parábola passamos um outro plano paralelo à base, cortando o lado $\tau\delta$ no ponto $\varepsilon$, Figura 9.4 (a). Seja $\zeta$ o ponto médio do segmento $\alpha\varepsilon$. Os pontos $\varepsilon\alpha\theta\delta$ formam um paralelogramo, Figura 9.4 (b). Portanto,

$$\delta\theta = \alpha\varepsilon\ , \tag{9.3}$$

por serem lados opostos do mesmo paralelogramo. Por definição temos também que

$$\alpha\varepsilon = 2\alpha\zeta\ . \tag{9.4}$$

Então:

$$Q(\theta\kappa) = R(\gamma\theta,\ 2\alpha\zeta)\ . \tag{9.5}$$

[14] [Euc56a, Volume 2, pág. 211]. Ver também o Apêndice C.

Pela Figura 9.4 (a) podemos ver que os triângulos $\alpha\gamma\theta$ e $\alpha\zeta\tau$ são equiângulos e, portanto, semelhantes.

A Proposição 4 do Livro VI de *Os Elementos* de Euclides afirma que:[15]

> Em triângulos equiângulos os lados ao redor dos ângulos iguais são proporcionais, e os lados que subtendem os ângulos iguais são os lados correspondentes [ou homólogos].

Na Figura 9.4 temos dois triângulos retângulos, isósceles e semelhantes, a saber, $\alpha\gamma\theta$ e $\alpha\zeta\tau$. Os lados $\gamma\theta$ e $\alpha\zeta$ são paralelos, os lados $\alpha\tau$ e $\alpha\gamma$ são colineares, enquanto que são retos os ângulos $\alpha\zeta\tau$ e $\alpha\gamma\theta$. Logo, os lados correspondentes destes dois triângulos são $\gamma\theta$ e $\alpha\tau$, $\alpha\theta$ e $\alpha\zeta$, assim como $\alpha\gamma$ e $\zeta\tau$. De acordo com a Proposição 4 de *Os Elementos* de Euclides podemos então escrever a seguinte proporção:

$$\frac{\gamma\theta}{\alpha\theta} = \frac{\alpha\tau}{\alpha\zeta} \; . \tag{9.6}$$

A partir desta equação obtemos:

$$\gamma\theta \cdot \alpha\zeta = \alpha\tau \cdot \alpha\theta \; . \tag{9.7}$$

Ou seja:

$$R(\gamma\theta, \; \alpha\zeta) = R(\alpha\tau, \; \alpha\theta) \; . \tag{9.8}$$

Ou ainda:

$$R(\gamma\theta, \; 2\alpha\zeta) = R(2\alpha\tau, \; \alpha\theta) \; . \tag{9.9}$$

Substituindo essa última expressão na Equação (9.5) obtemos finalmente a equação característica da parábola que é usada por Arquimedes nas suas demonstrações, a saber:

$$Q(\theta\kappa) = R(2\alpha\tau, \; \alpha\theta) \; . \tag{9.10}$$

Podemos expressar esta equação em termos algébricos modernos. Inicialmente chamamos a ordenada de $y$, a abscissa de $x$ e o parâmetro de $p$ (sendo este parâmetro o segmento de reta característico de uma determinada parábola, em um sistema de coordenadas definido pelo eixo da parábola e pela tangente no vértice). Definimos então, de acordo com a Figura 9.4 (b):

$$y = \theta\kappa \; , \tag{9.11}$$

$$x = \alpha\theta \; , \tag{9.12}$$

e

[15] [Euc56a, Volume 2, pág. 200].

$$p = 2\alpha\tau \ . \tag{9.13}$$

Com isto a Equação da parábola fica dada por:

$$y^2 = px \ . \tag{9.14}$$

### 9.3.2 Elipse e Hipérbole

A dedução da equação característica é a mesma para os dois casos e muito semelhante ao caso anterior. Vamos então detalhar somente a equação da elipse (seção de cone de ângulo agudo), a partir da Figura 9.6.

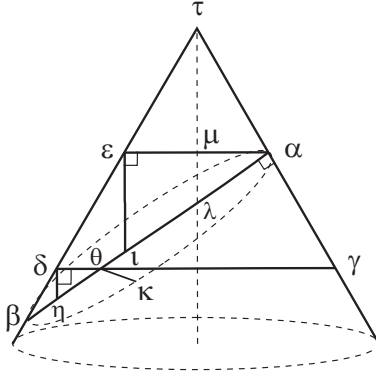



Figura 9.6: Construção de uma elipse de acordo com Menecmo.

Temos então um cone de ângulo agudo no vértice $\tau$. Seja $\alpha$ um ponto ao longo da geratriz $\tau\gamma$. Ao passar por $\alpha$ um plano perpendicular à geratriz $\tau\gamma$ formamos a elipse na superfície do cone. Seja $\alpha\beta$ o eixo ou diâmetro desta elipse ortogonal à geratriz $\tau\gamma$. O eixo do cone corta este diâmetro no ponto $\lambda$.

Neste caso também consideramos um ponto qualquer $\kappa$ sobre a elipse e, portanto, na superfície do cone. Por este ponto $\kappa$ traçamos um plano paralelo à base do cone. Logo o ponto $\kappa$ também estará localizado sobre este círculo paralelo à base que é a interseção do cone com o plano paralelo à base. O diâmetro deste círculo é $\gamma\delta$ e o ponto $\kappa$ está na sua circunferência, ver a Figura 9.5. Nestas condições o triângulo $\gamma\delta\kappa$ é um triângulo retângulo em $\kappa$. Tracemos por $\kappa$ uma reta perpendicular ao diâmetro $\gamma\delta$, cruzando este diâmetro no ponto $\theta$. A reta $\theta\kappa$, perpendicular a $\gamma\delta$, é a perpendicular traçada a partir do ângulo reto para a hipotenusa.

Também nestas condições podemos aplicar o Corolário da Proposição 8 do Livro VI de *Os Elementos* de Euclides.[16] Com isto obtemos então a seguinte igualdade:

$$Q(\theta\kappa) = R(\gamma\theta, \ \delta\theta) \ . \tag{9.15}$$

[16] Citado na Subseção 9.3.1, página 67 deste trabalho e demonstrado no Apêndice C.

Tracemos a partir de $\delta$ uma reta paralela ao eixo do cone, cortando o diâmetro $\alpha\beta$ no ponto $\eta$. Agora observamos na Figura 9.6 que os triângulos $\alpha\gamma\theta$ e $\delta\eta\theta$ são equiângulos (semelhantes). Temos então a seguinte proporção:

$$\frac{\gamma\theta}{\alpha\theta} = \frac{\eta\theta}{\delta\theta} \ . \tag{9.16}$$

A partir das Equações (9.15) e (9.16) obtemos:

$$Q(\theta\kappa) = R(\alpha\theta, \ \eta\theta) \ . \tag{9.17}$$

Por $\alpha$ passamos um outro plano paralelo à base, cortando o lado $\tau\delta$ no ponto $\varepsilon$, Figura 9.6. A partir de $\varepsilon$ traçamos uma perpendicular ao segmento $\alpha\varepsilon$ cruzando o diâmetro $\alpha\beta$ no ponto $\iota$. O triângulo $\alpha\varepsilon\iota$ também é semelhante aos triângulos $\alpha\gamma\theta$ e $\delta\eta\theta$. Portanto, temos as igualdades:

$$\frac{\eta\theta}{\alpha\iota} = \frac{\delta\theta}{\alpha\varepsilon} = \frac{\beta\theta}{\alpha\beta} \ . \tag{9.18}$$

Na Proposição 16 do Livro V de *Os Elementos* de Euclides se afirma que:[17]

> Caso quatro magnitudes estejam em proporção, estarão também, alternadamente, em proporção.

A partir destas igualdades obtemos, pelas propriedades das proporções:

$$\frac{\eta\theta}{\beta\theta} = \frac{\alpha\iota}{\alpha\beta} \ . \tag{9.19}$$

Consideramos agora o triângulo $\alpha\varepsilon\iota$, Figura 9.6, cortado pela reta $\tau\lambda$ paralela ao lado $\varepsilon\iota$. Temos então, de acordo com a Proposição 2 do Livro VI de *Os Elementos* de Euclides:[18]

> Se for traçada alguma reta paralela a um dos lados [de um triângulo], ela cortará os [outros] lados proporcionalmente; e se [dois] lados do triângulo forem cortados proporcionalmente, a reta ligando os pontos de corte será paralela ao [lado] restante do triângulo.

Com isto podemos escrever:

$$\frac{\alpha\lambda}{\alpha\iota} = \frac{\alpha\mu}{\alpha\varepsilon} = \frac{1}{2} \ , \tag{9.20}$$

sendo $\mu$ é o ponto médio do segmento $\alpha\varepsilon$. Disto vem que:

$$\alpha\iota = 2\alpha\lambda \ . \tag{9.21}$$

Multiplicando o numerador e o denominador do primeiro membro da Equação (9.19) por $\alpha\theta$ obtém-se:

---

[17] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro V, Proposição 16, [Euc09, pág. 221].

[18] [Euc08, pág. 157].

$$\frac{\alpha\theta \cdot \eta\theta}{\alpha\theta \cdot \beta\theta} = \frac{\alpha\iota}{\alpha\beta} = \frac{2\alpha\lambda}{\alpha\beta} \ . \tag{9.22}$$

De acordo com a Equação (9.17) obtemos então que:

$$\frac{Q(\theta\kappa)}{R(\alpha\theta,\ \beta\theta)} = \frac{2\alpha\lambda}{\alpha\beta} \ , \tag{9.23}$$

onde as grandezas $\alpha\beta$ e $\alpha\lambda$ são características de um determinada curva. Portanto, o segundo membro da Equação acima é uma constante para cada curva.

A Equação (9.23) é usada por Arquimedes para definir as propriedades de uma elipse ou de uma hipérbole, como será visto em vários teoremas de *O Método*.

# Capítulo 10

# A Essência do Método de Arquimedes

## 10.1 Elementos Principais do Método

Antes de apresentar a tradução de *O Método* de Arquimedes, achamos importante mostrar a essência de sua metodologia. Nos parece que desta maneira é possível facilitar a compreensão do trabalho traduzido. O texto original apresenta para o leitor de hoje uma grande complexidade devido à forma descritiva das equações dos matemáticos da antiga Grécia.

Portanto, para contornar as eventuais dificuldades inerentes à leitura do texto original, apresentamos antes dele uma análise dos principais teoremas discutidos por Arquimedes. Nossa ênfase está na demonstração física de cada teorema. Incluímos comentários explicativos contendo as equações escritas em forma moderna. Além disso, enriquecemos o texto incluindo uma representação visual contendo os vários passos da demonstração física de cada teorema.

O método descoberto por Arquimedes e usado neste seu tratado para determinar áreas, volumes e centros de gravidade de figuras geométricas planas e sólidas aparece claramente a partir do primeiro teorema. Ele tem como base os seguintes princípios:

1. Por meio de considerações puramente geométricas determina-se a razão existente entre certas distâncias e certas grandezas pertencentes às figuras. Estas grandezas podem ser os comprimentos de algumas linhas, as áreas de algumas superfícies, ou os volumes de alguns sólidos.

2. Atribui-se um peso às figuras geométricas, supondo-se que ele esteja distribuído homogeneamente nas figuras. Ou seja, Arquimedes considera que os segmentos lineares, as áreas, e os volumes possuem pesos proporcionais a estes comprimentos, áreas e volumes, respectivamente.

3. Estas grandezas são colocadas em equilíbrio de acordo com a lei da alavanca, Equação (7.1).

4. As figuras planas são consideradas como sendo constituídas por todos os segmentos de linha nelas traçados em uma determinada direção. Analogamente, as figuras sólidas são considerados como sendo constituídas por todas as intersecções nelas determinadas por planos com uma inclinação definida.

5. Pelo equilíbrio da alavanca e por sua lei, Equação (7.1), pode-se determinar uma grandeza desconhecida a partir de outras grandezas conhecidas. Esta grandeza desconhecida pode ser uma área, um volume, ou o centro de gravidade de um objeto.

Os princípios aqui citados são usualmente conhecidos como:[1]

- Método do baricentro.

- Método dos indivisíveis.

É importante observar que o próprio Arquimedes não considera que este método seja uma demonstração verdadeira. Já no primeiro teorema do *Método* ele deixa claro que a verdadeira demonstração é aquela obtida por via geométrica. Porém, como ele próprio afirma, é mais fácil obter uma demonstração sabendo de antemão qual é o resultado que queremos alcançar. Seu método lhe permitiu descobrir os resultados finais almejados. Em geral ele complementava as demonstrações mecânicas utilizando este método com outras demonstrações puramente geométricas.

A partir da próxima Seção começaremos a ver como Arquimedes utiliza várias alavancas em equilíbrio para obter resultados puramente geométricos. Embora esse trabalho seja essencialmente teórico, achamos importante enfatizar aqui que podem ser construídas balanças reais contendo corpos em equilíbrio sobre ela, satisfazendo às condições estabelecidas por Arquimedes.[2]

## 10.2 Demonstração Física do Teorema I: Área de um Segmento Parabólico

Vamos exemplificar a aplicação deste método no primeiro teorema da obra de Arquimedes em que ele obtém a área de um segmento parabólico em termos do triângulo inscrito na parábola. Na Figura 10.1 temos um segmento de parábola $\rho\phi\gamma$ com vértice $\phi$ e diâmetro $\eta\phi$.

O diâmetro $\eta\phi$ é o eixo de simetria da parábola $\rho\phi\gamma$ com vértice $\phi$. A corda $\gamma\rho$ é a base do segmento, sendo perpendicular a $\eta\phi$, com $\eta$ sendo o ponto médio de $\gamma\rho$. Temos ainda uma corda $\alpha\gamma$ inclinada em relação ao diâmetro. O ponto $\delta$ divide ao meio o segmento $\alpha\gamma$. A partir do ponto $\delta$ Arquimedes traça um segmento paralelo ao diâmetro $\eta\phi$. Seja $\beta$ o ponto em que esta reta paralela ao

[1] [Dij87, págs. 318-319].
[2] Ver o trabalho de Seco, [Sec10].

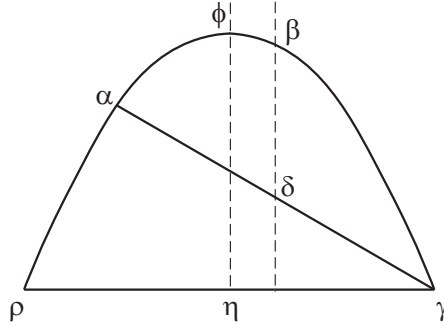



Figura 10.1: Parábola $\rho\phi\gamma$ com vértice $\phi$, diâmetro $\eta\phi$ e corda $\gamma\rho$ perpendicular ao diâmetro, sendo dividida ao meio em $\eta$. Arquimedes considera o caso geral de um segmento parabólico $\alpha\beta\gamma$ com corda $\alpha\gamma$ inclinada em relação ao diâmetro. O ponto $\delta$ divide $\alpha\gamma$ ao meio, enquanto que $\beta\delta$ é paralela ao diâmetro $\eta\phi$.

diâmetro corta a parábola. Temos então que, por construção, o segmento $\beta\delta$ é paralelo ao diâmetro $\eta\phi$.

No caso particular em que $\alpha$ coincide com $\rho$ temos que a corda $\alpha\gamma$ coincidirá com $\gamma\rho$ sendo, portanto, perpendicular ao diâmetro $\eta\phi$, já que $\beta$ vai coincidir com $\phi$ enquanto que $\delta$ vai coincidir com $\eta$, Figura 10.2 (a). Arquimedes considera o caso geral do segmento parabólico $\alpha\beta\gamma$ com corda $\alpha\gamma$ inclinada em relação ao diâmetro $\eta\phi$, Figura 10.2 (b). Quando $\alpha$ coincide com $\rho$ voltamos ao caso simétrico em que $\beta$ coincide com $\phi$.

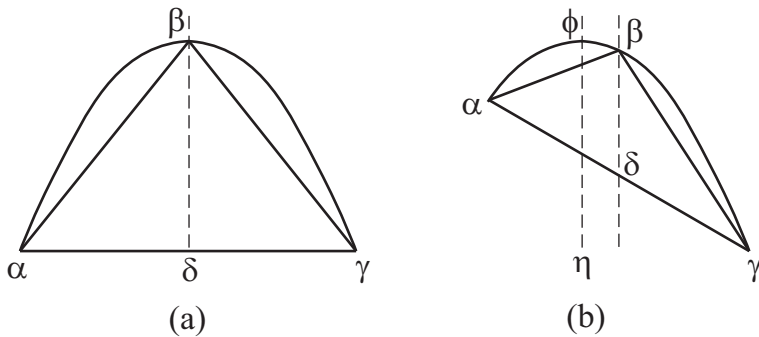



Figura 10.2: (a) Corda $\alpha\gamma$ perpendicular ao diâmetro $\eta\phi = \beta\delta$. (b) Corda $\alpha\gamma$ inclinada em relação ao diâmetro $\eta\phi$.

Arquimedes vai mostrar que o segmento parabólico $\alpha\beta\gamma$ tem uma área igual a 4/3 da área do triângulo $\alpha\beta\gamma$ inscrito na parábola. Este resultado é válido

tanto no caso simétrico em que a corda $\alpha\gamma$ é perpendicular ao diâmetro, Figura 10.2 (a), quanto no caso geral em que a corda $\alpha\gamma$ pode estar inclinada em relação ao diâmetro, Figura 10.2 (b).

Ou seja, nos dois casos vale a seguinte relação:

$$\frac{\text{área parabólica } \alpha\beta\gamma}{\text{área do triângulo } \alpha\beta\gamma} = \frac{4}{3} \ . \tag{10.1}$$

Na Figura 10.3 apresentamos o caso geral deste primeiro teorema de acordo com as representações de Dijksterhuis[3] e Heath.[4]

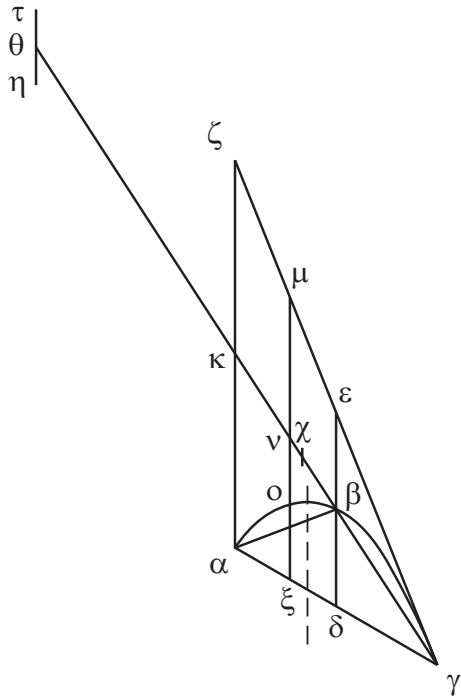



Figura 10.3: Construção geométrica do Teorema I no caso geral. O segmento de reta tracejada é o diâmetro ou eixo de simetria da parábola.

Apresentamos agora os passos principais utilizados por Arquimedes para chegar no resultado expresso pela Equação (10.1).

É dada uma parábola $\alpha\beta\gamma$ circunscrita ao triângulo $\alpha\beta\gamma$, Figura 10.3. O ponto $\delta$ divide a base $\alpha\gamma$ em duas partes iguais. O segmento de reta $\gamma\varepsilon$ é a tangente à parábola no ponto $\gamma$. Os segmentos $\alpha\zeta$, $\mu\xi$ e $\delta\varepsilon$ são paralelos ao diâmetro da parábola, estando $\mu\xi$ a uma distância arbitrária de $\alpha\zeta$. Além disso, escolhe-se o ponto $\theta$ no prolongamento de $\beta\gamma$ tal que $\gamma\theta$ seja dividida ao meio

[3] Ver [Arc87, pág. 317].
[4] Ver [Arc02a, pág. 16].

no ponto $\kappa$ que está ao longo de $\alpha\zeta$. Arquimedes mostra que os pontos $\kappa$, $\nu$ e $\beta$ dividem ao meio os segmentos $\alpha\zeta$, $\mu\xi$ e $\varepsilon\delta$, respectivamente.

A partir da geometria da Figura 10.3 Arquimedes prova que:[5]

$$\frac{\mu\xi}{\xi o} = \frac{\theta\kappa}{\kappa\nu} \ . \tag{10.2}$$

Arquimedes então considera os segmentos $\mu\xi$ e $\xi o$ como tendo pesos proporcionais aos seus comprimentos. Supõe então uma alavanca horizontal colocada ao longo de $\gamma\theta$ com seu fulcro no ponto médio $\kappa$. A partir da lei da alavanca, Equação (7.1), juntamente com a Equação (10.2), vem que ela permanecerá em equilíbrio, parada em relação ao solo, se o segmento pesado $\mu\xi$ permanecer em seu lugar apoiado por seu centro $\nu$, enquanto que, simultaneamente, o segmento $\xi o$ for deslocado para $\tau\eta$ com seu centro colocado em $\theta$. Esta condição de equilíbrio está representada na Figura 10.4.

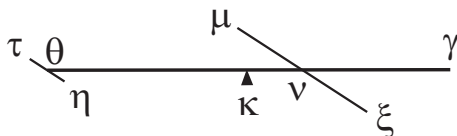



Figura 10.4: Equilíbrio dos segmentos retilíneos sobre a alavanca horizontal.

Com isto chegamos à seguinte condição matemática de equilíbrio:

$$\frac{\text{Peso }(\mu\xi)}{\text{Peso }(\xi o)} = \frac{\text{Peso }(\mu\xi)}{\text{Peso }(\tau\eta)} = \frac{\theta\kappa}{\kappa\nu} \ . \tag{10.3}$$

Arquimedes faz o mesmo procedimento para todas as linhas $\mu\xi$ entre $\alpha$ e $\gamma$. Os segmentos $\xi o$ de $\alpha$ até $\gamma$ vão formar o segmento parabólico $\alpha\beta\gamma$ apoiado sobre $\theta$. Os segmentos $\mu\xi$ de $\alpha$ até $\gamma$ vão formar o triângulo $\alpha\gamma\zeta$ distribuído ao longo do segmento $\gamma\kappa$. Ficamos então com uma alavanca $\gamma\theta$ em equilíbrio ao redor do fulcro $\kappa$ com duas figuras sobre ela: o segmento parabólico $\alpha\beta\gamma$ com seu centro de gravidade apoiado em $\theta$, e o triângulo $\alpha\zeta\gamma$ distribuído ao longo do segmento $\gamma\kappa$, como na Figura 10.5.

Pelo sexto postulado de seu trabalho anterior *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, citado na Subseção 7.1.3, página 47 deste livro, vem que esta alavanca ainda continuará em equilíbrio colocando todo o triângulo $\alpha\gamma\zeta$ apoiado na alavanca apenas por seu centro de gravidade. Ou seja, em vez de ficar distribuído ao longo do braço, ele vai ser apoiado apenas por um ponto que coincide com o centro de gravidade do triângulo. Nas Proposições 13 e 14 da obra *Sobre o Equilíbrio dos Planos* ele também havia provado que:[6]

> Em todo triângulo, o centro de gravidade está situado sobre a reta ligando um vértice ao ponto médio do lado oposto.

[5] Uma demonstração desta equação encontra-se na Seção A.1 do Apêndice A.
[6] [Arq08, págs. 235 e 238].

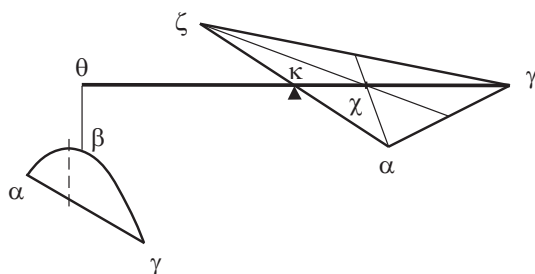



Figura 10.5: Esta alavanca horizontal $\gamma\theta$ fica em equilíbrio ao redor do fulcro $\kappa$ com a área parabólica $\alpha\beta\gamma$ apoiada sobre $\theta$, enquanto que o triângulo $\alpha\gamma\zeta$ fica distribuído ao longo do segmento $\gamma\kappa$.

> Em todo triângulo o centro de gravidade é o ponto de encontro das linhas retas ligando os vértices do triângulo aos pontos médios dos lados.

O Lema 5 de *O Método* afirma analogamente que:[7]

> O centro de gravidade de todo triângulo é o ponto de interseção das retas traçadas dos ângulos do triângulo aos pontos médios dos lados [opostos].

No caso do triângulo $\alpha\gamma\zeta$ da Figura 10.5 temos que $\gamma\kappa$ liga o vértice $\gamma$ ao ponto médio $\kappa$ do segmento $\alpha\zeta$. O centro de gravidade deste triângulo está sobre o ponto $\chi$ de $\gamma\kappa$ que divide este segmento tal que

$$\frac{\gamma\kappa}{\kappa\chi} = \frac{3}{1} \ . \tag{10.4}$$

Logo, a alavanca vai continuar em equilíbrio na situação da Figura 10.6.

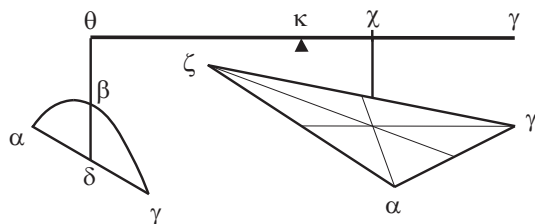



Figura 10.6: A alavanca horizontal fica em equilíbrio ao redor do fulcro $\kappa$ com a área parabólica $\alpha\beta\gamma$ apoiada sobre $\theta$, enquanto que o triângulo $\alpha\gamma\zeta$ fica apoiado sobre $\chi$, onde temos $\kappa\chi = \gamma\kappa/3$.

Pela lei da alavanca, Equação (7.1), juntamente com a proporcionalidade entre os pesos e as áreas, além da Equação (10.4), vem que a situação de equilíbrio representada pela Figura 10.6 pode ser escrita como:

[7] Ver a página 146 desse livro. Ver ainda *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Livro I, Proposição 14, [Arq08, pág. 238].

$$\frac{\text{área parabólica } \alpha\beta\gamma}{\text{área do triângulo } \alpha\gamma\zeta} = \frac{\kappa\chi}{\theta\kappa} = \frac{1}{3} \ . \tag{10.5}$$

A partir das proporcionalidades entre os segmentos da Figura 10.3 é fácil demonstrar que:

$$\text{área do triângulo } \alpha\gamma\zeta = 4 \cdot (\text{área do triângulo } \alpha\beta\gamma) \ . \tag{10.6}$$

Utilizando as Equações (10.5) e (10.6) obtém-se finalmente a relação entre a área do segmento parabólico e a área do triângulo inscrito na parábola:

$$\frac{\text{área parabólica } \alpha\beta\gamma}{\text{área do triângulo } \alpha\beta\gamma} = \frac{4}{3} \ . \tag{10.7}$$

Este é o resultado obtido pela primeira vez por Arquimedes, a saber, a quadratura da parábola. Ele foi obtido combinando propriedades geométricas com a lei da alavanca.

### 10.2.1 Experiências Mostrando o Equilíbrio de Alavancas Satisfazendo ao Teorema I

Seguindo o trabalho de Seco,[8] foram construídas figuras planas de borracha rígida seguindo as especificações desse Teorema I de Arquimedes. A Figura 10.7 mostra o equilíbrio real de uma alavanca, análoga à Figura 10.5.

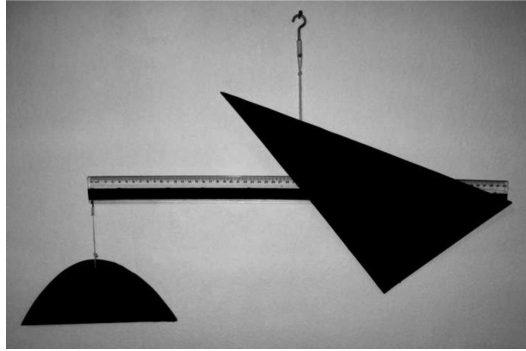



Figura 10.7: Alavanca em equilíbrio com a seção parabólica apoiada por seu centro de gravidade e com o triângulo apoiado no braço da alavanca.

Já na Figura 10.8 o triângulo passou a ser apoiado apenas por seu centro de gravidade, mostrando que a alavanca continua em equilíbrio. Este equilíbrio real é análogo à situação da Figura 10.6.

[8] [Sec10].

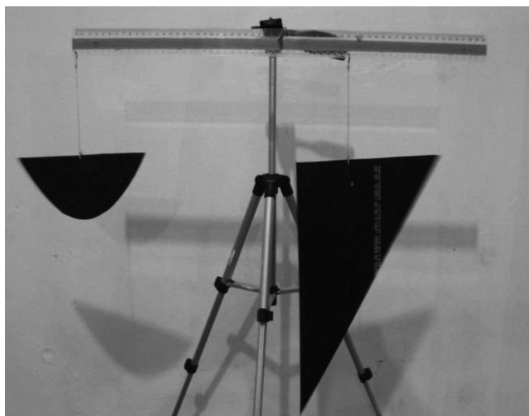



Figura 10.8: Alavanca em equilíbrio com a seção parabólica e o triângulo apoiados apenas por seus centros de gravidade.

### 10.2.2 Importância do Teorema I

Apresentamos agora quais são os aspectos mais importantes deste Teorema demonstrado por Arquimedes.

- O próprio Arquimedes menciona na carta endereçada a Eratóstenes que este foi o primeiro teorema geométrico que lhe foi revelado pela mecânica.[9] Ou seja, não é casual o fato deste teorema aparecer em primeiro lugar em seu trabalho *O Método*. Ele o apresentou na frente dos outros teoremas por ter sido a primeira aplicação do método.

- Já se conhecia há muito tempo a demonstração geométrica apresentada por Arquimedes da quadratura da parábola, a saber, que a área de uma parábola é igual e 4/3 do triângulo que tem a mesma base e a mesma altura. Esta demonstração geométrica se encontra em seu trabalho *Quadratura da Parábola*, que sempre constou nos manuscritos conhecidos que continham suas obras.[10] Lá se encontra uma afirmação muito importante de Arquimedes, a saber:

  > Resolvi comunicar a você [Dositeu], assim como pretendia enviar a Cónon, um certo teorema geométrico que não havia sido investigado anteriormente [por outros cientistas] mas que foi agora investigado por mim, o qual descobri inicialmente por meio da mecânica e então exibi por meio da geometria.

  Existem duas coisas muito importantes a serem enfatizadas a partir desta citação. A primeira é que foi o próprio Arquimedes o primeiro a obter

[9]Palavras textuais de Arquimedes, como veremos na página 145 deste trabalho: "Portanto, descrevo inicialmente o primeiro [teorema] que me foi revelado pela mecânica."

[10][Arc02b, Quadrature of the Parabola, págs. 233-252].

a quadratura da parábola. Ou seja, ninguém antes dele havia sequer enunciado este resultado, quanto menos apresentado uma demonstração. A segunda é que o resultado foi inicialmente obtido pela mecânica. Apenas depois que já sabia o resultado é que Arquimedes conseguiu elaborar uma demonstração geométrica do teorema. Com a descoberta de *O Método* ficamos finalmente sabendo como ele havia chegado a este teorema por meio da mecânica. Em particular, Arquimedes considerou uma alavanca em equilíbrio sob a ação gravitacional terrestre, com uma parábola e um triângulo apoiados sobre os braços da alavanca em distâncias específicas do fulcro, como indicado pela Figura 10.6. Conhecendo o centro de gravidade do triângulo, ou seja, que $\kappa\chi$ é $1/3$ de $\theta\kappa$, o equilíbrio desta alavanca permite que se obtenha a área da parábola em termos da área do triângulo, sendo este seu objetivo.

- Com este teorema Arquimedes conseguiu obter a área delimitada por uma curva, a parábola, em termos da área de um certo polígono, o triângulo inscrito na parábola. Os gregos sabiam que a diagonal de um paralelogramo o divide em dois triângulos semelhantes possuindo a metade da área do paralelogramo. Além disso, conseguiram construir geometricamente um quadrado que tinha a mesma área de um dado paralelogramo. Como todo polígono pode ser decomposto em triângulos, isto significa que conseguiam obter geometricamente um quadrado que tinha a mesma área que qualquer polígono dado. Com este teorema Arquimedes conseguiu então obter a quadratura da parábola, ou seja, construir geometricamente um quadrado que tivesse a mesma área que um dado segmento de parábola.

  Este é um resultado extremamente importante, já que é um dos primeiros exemplos na geometria em que se consegue obter a área de uma figura curva, a parábola, em termos da área de uma figura retilínea, a saber, um certo quadrado.

  Anteriormente o próprio Arquimedes havia demonstrado em a *Medida do Círculo* a igualdade da área de um círculo com a área de um triângulo específico:[11]

  > Todo círculo é equivalente a um triângulo retângulo, no qual um dos lados do ângulo reto é igual ao raio e o outro lado [do ângulo reto] é igual ao perímetro [do círculo, ou seja, é igual à circunferência].

  Esta igualdade de áreas está ilustrada nas Figuras 4.4 e 10.9.

  Seja $A_T$ a área do triângulo retângulo e $A_C$ a área do círculo de raio $r$ e circunferência $c$. Vamos chamar de $\pi$ à razão entre a circunferência do círculo e seu diâmetro de valor $2r$:

  $$\frac{c}{2r} = \pi \ , \tag{10.8}$$

  ou,

[11] Ver *Medida do Círculo*, Proposição 1, [Mug70, pág. 138].

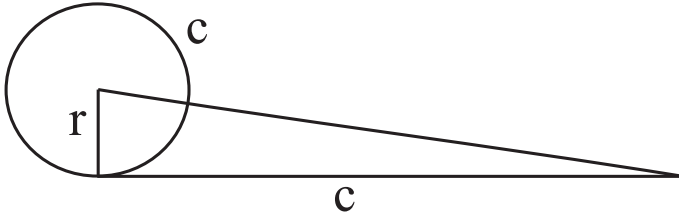



Figura 10.9: Arquimedes provou que este círculo e este triângulo retângulo possuem a mesma área.

$$c = 2\pi r \ . \tag{10.9}$$

O resultado expresso em palavras por Arquimedes em a *Medida do Círculo* é apresentado hoje em dia pela seguinte fórmula:

$$A_C = A_T = \frac{c \cdot r}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2 \ . \tag{10.10}$$

## 10.3 Demonstração Física do Teorema II: Volume da Esfera

Vamos agora ver a essência do método aplicada ao cálculo do volume de uma esfera. No segundo teorema de *O Método* Arquimedes prova o seguinte resultado:

> Toda esfera é o quádruplo do cone que tem sua base igual ao círculo máximo da esfera e uma altura igual ao raio da esfera.

Para chegar neste resultado ele considera a Figura 10.10 (a).

Nesta Figura 10.10 (a) temos uma visão lateral de quatro corpos volumétricos, a saber, a esfera $\alpha\beta\gamma\delta$, o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ tendo como base o círculo de diâmetro $\varepsilon\zeta$, o cilindro $\phi\chi\psi\omega$ circunscrito à esfera e tendo como bases os círculos de diâmetros $\phi\psi$ e $\chi\omega$, e o cilindro $\varepsilon\zeta\eta\lambda$ tendo como bases os círculos de diâmetros $\eta\lambda$ e $\varepsilon\zeta$. Estes corpos são vistos em perspectiva na Figura 10.10 (b), não apresentada por Arquimedes. O centro da esfera é $\kappa$, sendo seus diâmetros ortogonais $\alpha\gamma$ e $\beta\delta$. Escolhe-se um ponto $\theta$ ao longo do prolongamento de $\alpha\gamma$ tal que $\alpha\theta = \alpha\gamma$. O círculo de diâmetro $\mu\nu$ é paralelo às bases circulares dos cilindros, cortando a esfera em um círculo de diâmetro $\xi o$ e o cone em um círculo de diâmetro $\pi\rho$, todos com centros em $\sigma$.

A partir da geometria da Figura 10.10 Arquimedes prova que:[12]

$$\frac{\mu\nu \cdot \mu\nu}{\xi o \cdot \xi o + \pi\rho \cdot \pi\rho} = \frac{\alpha\theta}{\alpha\sigma} \ . \tag{10.11}$$

[12]Uma dedução desta equação encontra-se na Seção A.2 do Apêndice A.

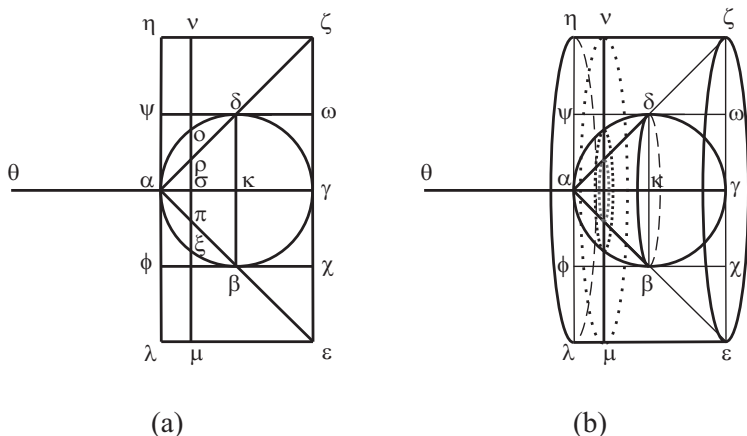



Figura 10.10: (a) Visão lateral. (b) Visão em perspectiva. Esfera $\alpha\beta\gamma\delta$, cone $\alpha\varepsilon\zeta$, cilindro $\phi\chi\psi\omega$ e cilindro $\varepsilon\zeta\eta\lambda$.

A Proposição 2 do Livro XII de *Os Elementos* de Euclides afirma que:[13]

> Os círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros.

Portanto, a Equação (10.11) pode ser colocada na seguinte forma:

$$\frac{\alpha\theta}{\alpha\sigma} = \frac{\textit{Círculo de diâmetro } \mu\nu}{(\textit{Círculo de diâmetro } \xi o) + (\textit{Círculo de diâmetro } \pi\rho)} \, . \tag{10.12}$$

Arquimedes então considera os círculos de diâmetros $\mu\nu$, $\xi o$ e $\pi\rho$ como tendo pesos proporcionais às suas áreas. Supõe então uma alavanca horizontal colocada ao longo de $\gamma\theta$ com seu fulcro no ponto médio $\alpha$. Utilizando a lei da alavanca, Equação (7.1), vem que ela permanecerá em equilíbrio se a superfície circular pesada $\mu\nu$ permanecer em seu lugar apoiada por seu centro $\sigma$, enquanto que, simultaneamente, as áreas circulares pesadas $\xi o$ e $\pi\rho$ forem deslocadas para a extremidade da alavanca, com seus centros apoiados em $\theta$. Esta condição de equilíbrio está representada na Figura 10.11.

Na Figura 10.12 representamos a mesma situação de equilíbrio da Figura 10.11 mas agora com os três círculos vistos de lado e dependurados por fios de peso desprezível. Nesta situação a alavanca permanece em equilíbrio.

A Equação matemática (10.12) foi então representada fisicamente por Arquimedes através de alavancas em equilíbrio em relação ao solo, como indicado nas Figuras 10.11 e 10.12.

Arquimedes faz o mesmo procedimento para todos os círculos $\mu\nu$ entre $\eta\lambda$ e $\varepsilon\zeta$. Os círculos $\xi o$ indo de $\eta\lambda$ até $\varepsilon\zeta$ vão formar a esfera $\alpha\beta\gamma\delta$ apoiada sobre $\theta$. Os círculos $\pi\rho$ indo de $\eta\lambda$ até $\varepsilon\zeta$ vão formar o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ apoiado sobre $\theta$. Já os

[13] [Euc09, pág. 528].

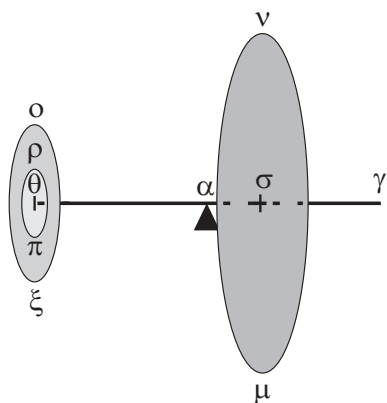



Figura 10.11: A alavanca horizontal $\gamma\theta$ fica em equilíbrio ao redor do fulcro $\alpha$ quando o círculo $\mu\nu$ está apoiado sobre $\sigma$ enquanto que os círculos $\xi o$ e $\pi\rho$ estão apoiados sobre $\theta$.

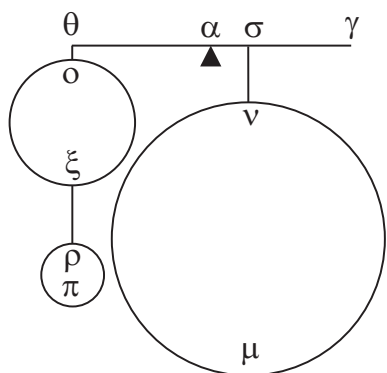



Figura 10.12: A alavanca horizontal $\gamma\theta$ fica em equilíbrio ao redor do fulcro $\alpha$ quando o círculo $\mu\nu$ está apoiado sobre $\sigma$ enquanto que os círculos $\xi o$ e $\pi\rho$ estão apoiados sobre $\theta$.

círculos $\mu\nu$ indo de $\eta\lambda$ até $\varepsilon\zeta$ vão formar o cilindro $\varepsilon\zeta\eta\lambda$ com seu eixo apoiado ao longo segmento $\alpha\gamma$. Ficamos então com uma alavanca $\gamma\theta$ em equilíbrio ao redor do fulcro $\alpha$ com três figuras sobre ela, como representado na Figura 10.13.

Pelo sexto postulado de seu trabalho anterior *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, citado na Subseção 7.1.3, página 47 deste livro, vem que esta alavanca ainda permanecerá em equilíbrio ao redor do fulcro $\alpha$ colocando todo o cilindro $\varepsilon\zeta\eta\lambda$ apoiado apenas por seu centro de gravidade.

No oitavo lema de *O Método* Arquimedes afirma que:

> O centro de gravidade de todo cilindro é o ponto que divide o eixo em duas partes iguais.

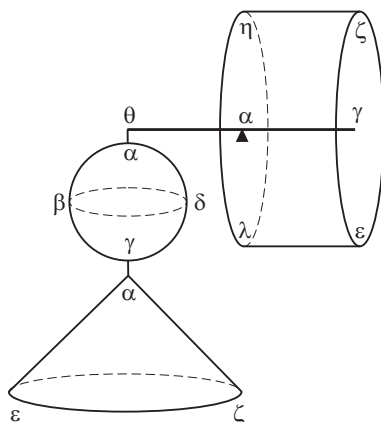



Figura 10.13: Esta alavanca $\gamma\theta$ fica em equilíbrio ao redor do fulcro $\alpha$ com a esfera $\alpha\beta\gamma\delta$ e o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ apoiados sobre $\theta$, enquanto que o cilindro $\varepsilon\zeta\eta\lambda$ fica com seu eixo apoiado ao longo do segmento $\alpha\gamma$.

O ponto $\kappa$ divide o segmento $\alpha\gamma$ ao meio, sendo este segmento o eixo do cilindro $\varepsilon\zeta\eta\lambda$. Portanto, este cilindro pode ser apoiado apenas pelo ponto $\kappa$ que ainda assim a alavanca permanecerá em equilíbrio ao redor do fulcro $\alpha$, Figura 10.14.

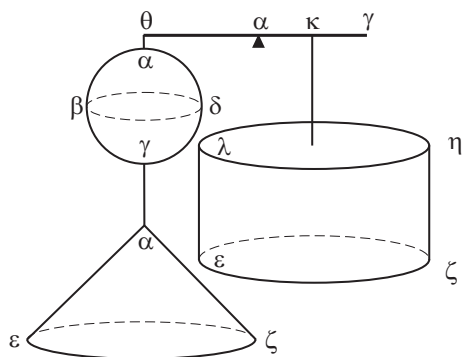



Figura 10.14: A alavanca continua em equilíbrio ao redor de $\alpha$ com a esfera e o cone apoiados sobre $\theta$, enquanto que o cilindro fica apoiado apenas sobre seu centro de gravidade $\kappa$.

Pela lei da alavanca, Equação (7.1), juntamente com a proporcionalidade entre os pesos e os volumes, vem que a situação de equilíbrio representada pela Figura 10.14 pode ser escrita como:

$$\frac{\text{cilindro } \varepsilon\zeta\eta\lambda}{\text{esfera } \alpha\beta\gamma\delta \ + \ \text{cone } \alpha\varepsilon\zeta} = \frac{\alpha\theta}{\alpha\kappa} = \frac{2}{1} \ . \tag{10.13}$$

A Proposição 10 do Livro XII de *Os Elementos* de Euclides afirma que:[14]

> Todo cone é uma terça parte do cilindro que tem a mesma base que ele e altura igual.

Ou seja, todo cilindro é equivalente ao triplo do cone inscrito no cilindro. Em outras palavras, o volume do cilindro é igual ao triplo do volume do cone inscrito no cilindro:

$$\text{cilindro } \varepsilon\zeta\eta\lambda = 3 \cdot (\text{cone } \alpha\varepsilon\zeta) \ . \tag{10.14}$$

Combinando as Equações (10.13) e (10.14) obtém-se:

$$2 \cdot (\text{esfera } \alpha\beta\gamma\delta) = \text{cone } \alpha\varepsilon\zeta \ . \tag{10.15}$$

Como o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ tem o dobro da altura do cone $\alpha\beta\delta$ e sua base tem o dobro do diâmetro da base do cone $\alpha\beta\delta$ vem que:

$$\text{cone } \alpha\varepsilon\zeta = 8 \cdot (\text{cone } \alpha\beta\delta) \ . \tag{10.16}$$

Combinando as Equações (10.15) e (10.16) obtém-se finalmente o resultado anunciado por Arquimedes, a saber:

$$\text{esfera } \alpha\beta\gamma\delta = 4 \cdot (\text{cone } \alpha\beta\delta) \ . \tag{10.17}$$

É desta forma que ele provou a primeira parte do segundo teorema de *O Método*, novamente por resultados puramente geométricos combinados com a lei da alavanca.

Arquimedes prossegue então para a segunda parte deste teorema que afirma o seguinte:

> O cilindro que tem uma base igual ao círculo máximo de uma esfera e uma altura igual ao diâmetro da esfera é igual a três meios da esfera.

Para chegar a esta conclusão ele utiliza a seguinte relação geométrica, ver a Figura 10.10:

$$\text{cone } \alpha\beta\delta = \frac{1}{3}(\text{cilindro } \beta\delta\phi\psi) = \frac{1}{6}(\text{cilindro } \phi\chi\psi\omega) \ . \tag{10.18}$$

Combinando as Equações (10.17) e (10.18) obtém-se:

$$\text{cilindro } \phi\chi\psi\omega = \frac{3}{2}(\text{esfera } \alpha\beta\gamma\delta) \ . \tag{10.19}$$

Ou seja:

> O volume do cilindro que tem uma base igual ao círculo máximo de uma esfera e uma altura igual ao diâmetro da esfera é igual a três meios do volume da esfera.

[14] [Euc09, pág. 543].

### 10.3.1 Experiências Mostrando o Equilíbrio de Alavancas Satisfazendo ao Teorema II

Seguindo o trabalho de Seco,[15] foram construídas figuras sólidas de gesso de acordo com as especificações desse Teorema II de Arquimedes. A Figura 10.15 mostra o equilíbrio real de uma alavanca, análoga à Figura 10.14.

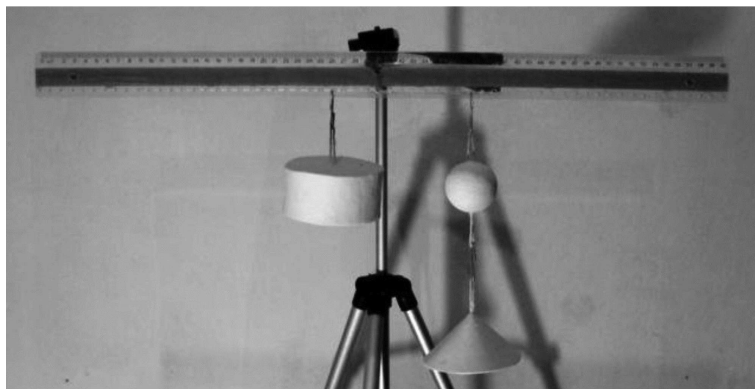



Figura 10.15: Alavanca em equilíbrio com um cilindro de gesso de um lado da alavanca e com um esfera e um cone dependurados do outro lado da alavanca.

### 10.3.2 Importância do Teorema II

Ressaltamos aqui os pontos mais relevantes deste segundo Teorema.

- O aspecto mais importante deste Teorema é que Arquimedes conseguiu obter pela primeira vez na história o volume de uma esfera. Seja $V_E$ o volume de uma esfera de raio $r$. Este volume é expresso hoje em dia pela seguinte fórmula:

$$V_E = \frac{4}{3}\pi r^3 \ . \tag{10.20}$$

  Vejamos como o raciocínio de Arquimedes nos leva à fórmula moderna. Antes apresentamos com suas palavras a segunda parte do teorema:

  > O cilindro que tem uma base igual ao círculo máximo de uma esfera e uma altura igual ao diâmetro da esfera é equivalente a três meios da esfera.

  Uma representação da esfera inscrita neste cilindro encontra-se na Figura 10.16.

[15] [Sec10].

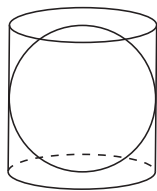



Figura 10.16: Esfera inscrita em um cilindro que tem uma base igual ao círculo máximo da esfera e uma altura igual ao diâmetro da esfera.

Chamando o volume do cilindro circunscrito à esfera de $V_C$ e o volume da esfera de $V_E$, o teorema de Arquimedes pode ser expresso matematicamente da seguinte maneira:

$$V_C = \frac{3}{2} V_E \ . \tag{10.21}$$

O volume do cilindro é dado pela sua altura multiplicada por sua base. Sua altura é o diâmetro da esfera de raio $r$, ou seja, $2r$. Sua base é o círculo máximo da esfera. Pela Equação (10.10) vem que Arquimedes conhecia esta área, que é expressa hoje em dia por $\pi r^2$. A partir da Equação (10.21) temos então que o volume da esfera é dado por:

$$V_E = \frac{2}{3} V_C = \frac{2}{3} 2r \cdot (\pi r^2) = \frac{4}{3} \pi r^3 \ . \tag{10.22}$$

Este resultado é a conhecida fórmula dada pela Equação (10.20).

- Poucos estudantes sabem hoje em dia que o volume da esfera foi obtido pela primeira vez por Arquimedes, como visto no item anterior. Embora a fórmula dada pela Equação (10.20) seja moderna, ela é equivalente ao resultado expresso em palavras por Arquimedes. Apesar disto, os estudiosos de Arquimedes sabiam que este resultado era devido a ele, já que se conhecia seu trabalho *Sobre a Esfera e o Cilindro* no qual apresentou uma demonstração geométrica deste teorema.[16] Mas foi apenas com a descoberta de *O Método* que se tornou conhecido como ele obteve este resultado pela primeira vez, ou seja, utilizando proporções entre áreas e supondo uma alavanca em equilíbrio sob a ação gravitacional terrestre. Por meio deste método concluiu que a alavanca da Figura 10.14 fica em equilíbrio com $\alpha\kappa$ sendo a metade de $\alpha\theta$. Desde Demócrito já se sabia que o volume de um cone vale um terço do volume do cilindro de mesma base e mesma altura, sendo isto demonstrado pela primeira vez por Eudoxo. Em *Os Elementos* de Euclides encontra-se uma demonstração deste teorema. Combinando este resultado com a lei da alavanca e a situação de equilíbrio representada pela Figura 10.14, Arquimedes conseguiu então

[16] [Arc02b, Proposição 34, págs. 41-44].

relacionar o volume da esfera com o volume do cone inscrito na mesma (primeira parte deste segundo Teorema). Conseguiu também relacionar o volume da esfera com o volume do cilindro circunscrito na esfera (segunda parte deste segundo Teorema).

Depois que chegou ao volume da esfera por meio da mecânica, conseguiu obter também uma demonstração geométrica.

- Também poucos estudantes sabem hoje em dia que a área de uma esfera foi obtida pela primeira vez por Arquimedes. Seja $A_E$ a área de uma esfera de raio $r$. A fórmula moderna que representa esta área é dada por:

$$A_E = 4\pi r^2 \ . \tag{10.23}$$

Embora não utilizasse fórmulas e não falasse do número $\pi$, Arquimedes demonstrou o seguinte teorema:[17]

> A superfície de qualquer esfera é igual a quatro vezes o círculo máximo da esfera.

A área do círculo máximo da esfera de raio $r$ é igual à área de um círculo de raio $r$. A área de um círculo era conhecida de Arquimedes, sendo expressa hoje em dia pela Equação (10.10). Combinando esta equação com a Proposição 33 da obra *Sobre a Esfera e o Cilindro* que acabamos de citar, vemos que o teorema expresso em palavras por Arquimedes pode ser colocado algebricamente na fórmula bem conhecida:

$$A_E = 4A_C = 4\pi r^2 \ . \tag{10.24}$$

Acontece que em sua obra *Sobre a Esfera e o Cilindro* este resultado aparece como o Teorema 33, sendo que o volume da esfera aparece como o Teorema 34. Logo todos pensavam que inicialmente Arquimedes havia calculado a área da esfera, para só então deduzir seu volume. Foi apenas com a descoberta de *O Método* que ficamos sabendo que Arquimedes inicialmente obteve o volume da esfera utilizando a lei da alavanca. Após isto é que foi levado à conclusão de que a área da esfera era o quádruplo de seu círculo máximo.

Apresentamos aqui o trecho importante de *O Método* contendo esta revelação:[18]

> Visto isso, [a saber,] que toda esfera é o quádruplo do cone que tem como base o círculo máximo e altura igual ao raio da esfera, surgiu a ideia de que a superfície de toda esfera fosse o quádruplo de seu círculo máximo. Com efeito, supus que, posto que todo círculo é equivalente a um triângulo tendo por base a circunferência do círculo

[17] [Arc02b, Proposição 33, págs. 39-41].
[18] Ver a pág. 152 deste trabalho.

> e por altura o raio do círculo, toda esfera também é equivalente a um cone tendo como base a superfície e como altura o raio da esfera.

Heath faz o seguinte comentário em uma nota de rodapé de sua tradução:[19]

> Ou seja, Arquimedes resolveu originalmente o problema de encontrar o volume de uma esfera antes de encontrar o valor de sua superfície, e inferiu o resultado desse último problema a partir [da solução] do problema anterior. Contudo, em *Sobre a Esfera e o Cilindro I*, a superfície é obtida de maneira independente (Prop. 33) e *antes* do volume, que é encontrado na Prop. 34: uma outra ilustração do fato de que a ordem das proposições nos tratados dos geômetras gregos como elaborados na forma final não segue necessariamente a ordem da descoberta.

- Arquimedes dava tanta importância às conclusões deste teorema relacionando o volume da esfera com o volume do cilindro circunscrito que pediu que fosse colocada no seu túmulo a figura de uma esfera e de um cilindro. Sabemos que seu desejo foi realizado devido ao relato de Cícero.

  O grande escritor romano Marcus Tullius Cícero foi governador da província da Sicília no ano de 75 a.C. Homem de letras e com profunda admiração pela cultura grega, tomou conhecimento da existência do local onde Arquimedes tinha sido sepultado 137 anos antes. Após sair em sua procura com algumas pessoas auxiliando-o, descobriu o túmulo de Arquimedes. Nele encontrou a figura que o próprio Arquimedes desejou fosse colocada em seu túmulo, a saber, uma esfera inscrita em um cilindro, Figura 10.16. Cícero relata estes fatos em seus numerosos escritos que nos chegaram praticamente intactos.[20]

  Podemos inferir que a descoberta da razão entre os volumes da esfera e do cilindro circunscrito a ela foi considerada por Arquimedes como sendo seu maior feito, motivo pelo qual desejou preservar esta grande descoberta em seu túmulo. É fascinante perceber em *O Método* que esta razão puramente geométrica foi obtida originalmente pela mecânica utilizando uma alavanca em equilíbrio, parada em relação ao solo.

## 10.4 Demonstração Física do Teorema III: Volume do Elipsoide de Revolução

No terceiro teorema de *O Método* Arquimedes prova o seguinte:[21]

---

[19] [Arc02a, pág. 21].

[20] Cícero, *Tusculanae Disputationes*, [Cicb, V, xxiii, 64, 65]: "[...] procurei o túmulo [...] encontrei uma pequena coluna aparecendo sobre os arbustos, na qual estava a figura de uma esfera e de um cilindro."

[21] Ver também *Sobre Conoides e Esferoides*, Proposição 27, [Mug70, pág. 226].

> O cilindro que tem a base igual ao círculo máximo de um elipsoide de revolução[22] e a altura igual ao eixo do elipsoide, é equivalente a uma vez e meia o elipsoide;
>
> e de todo elipsoide cortado por um plano pelo centro e perpendicular ao eixo, a metade do elipsoide é o dobro do cone que tem a mesma base do segmento do elipsoide e o mesmo eixo.

Na Figura 10.17 temos a construção de Arquimedes para este teorema.

Figura 10.17: Construção geométrica do teorema III.

A elipse $\alpha\beta\gamma\delta$ representa a interseção de um elipsoide de revolução por um plano passando pelo eixo $\alpha\gamma$, sendo $\alpha\gamma$ e $\beta\delta$ os dois eixos da elipse. Seja o círculo de diâmetro $\beta\delta$ perpendicular ao eixo $\alpha\gamma$ e seja construído o cone que tem por base este círculo e como vértice o ponto $\alpha$.

Seja prolongada a superfície lateral deste cone até encontrar um plano passando por $\gamma$ e paralelo à sua base. A interseção será um círculo perpendicular a $\alpha\gamma$ de diâmetro $\varepsilon\zeta$. Sobre o círculo de diâmetro $\varepsilon\zeta$ seja construído um cilindro de eixo $\alpha\gamma$. Seja prolongada a reta $\alpha\gamma$ até o ponto $\theta$ de modo que $\alpha\theta$ seja igual a $\alpha\gamma$. Seja ainda considerado $\gamma\theta$ como o travessão de uma alavanca da qual $\alpha$ é o ponto médio, que será considerado como fulcro.

No paralelogramo $\varepsilon\zeta\eta\lambda$ seja traçada a reta $\mu\nu$ paralela a $\varepsilon\zeta$ e cortando o segmento $\alpha\gamma$ no ponto $\sigma$. Arquimedes considera esta distância $\alpha\sigma$ arbitrária, sendo que esta distância vai variar ao longo da demonstração do teorema desde $\alpha\sigma = 0$ até $\alpha\sigma = \alpha\gamma$. Seja levantado por $\mu\nu$ um plano perpendicular a $\alpha\gamma$. Este plano cortará o cilindro segundo um círculo de diâmetro $\mu\nu$, o elipsoide segundo um círculo de diâmetro $\xi o$ e o cone segundo um círculo de diâmetro $\pi\rho$.

A partir da geometria da Figura 10.17, Arquimedes obtém a seguinte relação matemática:[23]

[22] Arquimedes usa o termo *esferoide* para designar o que chamamos hoje de elipsoide de revolução.

[23] A demonstração desta equação encontra-se na Seção A.3 do Apêndice A.

$$\frac{\alpha\theta}{\alpha\sigma} = \frac{Q(\mu\sigma)}{Q(\xi\sigma) + Q(\pi\sigma)} = \frac{\mu\sigma \cdot \mu\sigma}{\xi\sigma \cdot \xi\sigma + \pi\sigma \cdot \pi\sigma} . \tag{10.25}$$

Esta é a relação matemática básica que vai ser utilizada por Arquimedes, juntamente com a lei da alavanca, para demonstrar o terceiro teorema de *O Método*.

Veremos agora a demonstração física deste teorema.

Como nos teoremas anteriores, Arquimedes observa que uma proporção entre os quadrados de segmentos é a mesma proporção que existe entre as áreas ou os pesos dos círculos homogêneos cujos diâmetros são estes mesmos segmentos. Portanto, utilizando a Figura 10.17 concluímos que a Equação (10.25) pode ser escrita como:

$$\frac{\alpha\theta}{\alpha\sigma} = \frac{\textit{círculo de diâmetro } \mu\nu}{(\textit{círculo de diâmetro } \xi o) + (\textit{círculo de diâmetro } \pi\rho)} . \tag{10.26}$$

Sempre considerando os círculos como objetos homogêneos com peso distribuído uniformemente, a Equação (10.26) representa a lei da alavanca, considerando o ponto $\alpha$ como fulcro. Portanto, esta alavanca fica em equilíbrio com os círculos de diâmetro $\xi o$ e $\pi\rho$ colocados no ponto $\theta$, ou seja, com seus centros de gravidade atuando em $\theta$, juntamente com o círculo de diâmetro $\mu\nu$ permanecendo no seu lugar, isto é, com seu centro de gravidade atuando em $\sigma$. Esse equilíbrio com a alavanca parada em relação ao solo está representado na Figura 10.18 com os círculos dependurados por cordas sem peso cujas projeções passam por seus centros de gravidade.

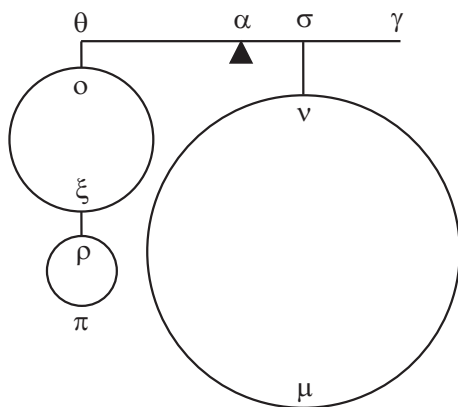



Figura 10.18: Representação do equilíbrio das seções circulares sobre uma alavanca com fulcro em $\alpha$.

O mesmo ocorre com qualquer reta $\mu\nu$ traçada entre $\alpha$ e $\gamma$, juntamente com o plano correspondente paralelo a $\varepsilon\zeta$. Então, todos os círculos assim determinados estarão em equilíbrio em relação ao ponto $\alpha$, com todos aqueles círculos de

diâmetro $\mu\nu$ permanecendo em seus lugares, enquanto que todos aqueles círculos de diâmetro $\xi o$ e $\pi\rho$ são transportados com seus centros de gravidade atuando sobre $\theta$.

Mas o elipsoide, o cone e o cilindro são constituídos por todos os círculos a eles correspondentes. Portanto, eles também estarão em equilíbrio em relação ao ponto $\alpha$, o cilindro permanecendo no seu lugar, mas o cone e o elipsoide sendo transportados para o ponto $\theta$, com seus centros de gravidade atuando em $\theta$, como mostrado na Figura 10.19.

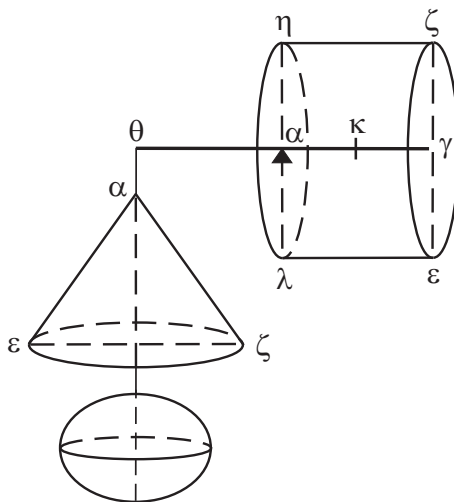



Figura 10.19: Representação do equilíbrio dos sólidos na alavanca.

Pelo Lema 8 de *O Método*,[24] o ponto $\kappa$ é o centro de gravidade do cilindro, enquanto que $\theta$ é o centro de gravidade comum do elipsoide e do cone. Pelo Postulado 6 da obra *Sobre o Equilíbrio dos Planos*[25] vem então que a alavanca vai continuar em equilíbrio quando o cilindro atua sobre ela apenas por seu centro de gravidade passando por $\kappa$, como está representado na Figura 10.20.

O equilíbrio representado pela Figura 10.20 pode ser expresso matematicamente da seguinte forma:

$$\frac{\alpha\theta}{\alpha\kappa} = \frac{cilindro}{elipsoide \ + \ (cone \ \alpha\varepsilon\zeta)} \ . \tag{10.27}$$

Mas:

$$\alpha\theta = 2\alpha\kappa \ . \tag{10.28}$$

Isto significa que temos também o seguinte resultado:

[24] Citado na Seção 10.3, página 84 deste trabalho.

[25] Citado na Subseção 7.1.3, página 47 deste trabalho, ver ainda [Arq08, págs. 215 a 220 e 226].

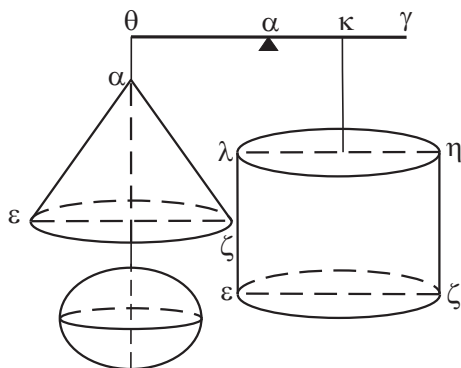



Figura 10.20: O equilíbrio com os corpos atuando sobre a alavanca através de seus centros de gravidade.

$$cilindro = 2(elipsoides) \; + \; 2(cones \; \alpha\varepsilon\zeta) \; . \qquad (10.29)$$

Vamos apresentar agora as Proposições 10 a 14 do Livro XII de *Os Elementos* de Euclides, já que serão utilizadas ao longo deste trabalho:[26]

> Proposição 10: Todo cone é uma terça parte do cilindro que tem a mesma base que ele e altura igual.
>
> Proposição 11: Os cones e cilindros que estão sob a mesma altura estão entre si como as bases.
>
> Proposição 12: Os cones e cilindros semelhantes estão entre si em uma razão tripla da [razão] dos diâmetros das bases.
>
> Proposição 13: Caso um cilindro seja cortado por um plano que é paralelo aos planos opostos, como o cilindro estará para o cilindro, assim o eixo para o eixo.
>
> Proposição 14: Os cones e cilindros que estão sobre bases iguais estão entre si como as alturas.

Portanto, pela Proposição 10:

$$cilindro = 3(cones \; \alpha\varepsilon\zeta) \; . \qquad (10.30)$$

Com isso temos que:

$$3(cones \; \alpha\varepsilon\zeta) = 2(elipsoides) \; + 2(cones \; \alpha\varepsilon\zeta) \; . \qquad (10.31)$$

Eliminando os dois cones em comum (esta é a maneira de expressão do próprio Arquimedes) vem:

$$cone \; \alpha\varepsilon\zeta = 2(elipsoides) \; . \qquad (10.32)$$

[26] [Euc09, págs. 543-553].

Pela Proposição 12 do Livro XII de *Os Elementos* de Euclides:

$$cone\ \alpha\varepsilon\zeta = 8(cones\ \alpha\beta\delta)\ , \tag{10.33}$$

já que o diâmetro $\varepsilon\zeta$ é o dobro do diâmetro $\beta\delta$.

Com isto ficamos então com:

$$elipsoide = 4(cones\ \alpha\beta\delta)\ . \tag{10.34}$$

Então como o elipsoide é o quádruplo do cone $\alpha\beta\delta$, temos demonstrado a segunda parte do teorema, a metade do elipsoide é o dobro do cone $\alpha\beta\delta$.

Vamos agora concluir a demonstração do teorema. Traçamos pelos pontos $\beta$ e $\delta$ as retas $\phi\chi$ e $\psi\omega$ paralelas a $\alpha\gamma$ e consideramos o cilindro que tem como bases os círculos de diâmetro $\phi\psi$ e $\chi\omega$.

Pela Proposição 13 do Livro XII de *Os Elementos* de Euclides temos que o cilindro $\phi\chi\psi\omega$ é o dobro do cilindro $\beta\delta\phi\psi$, pois as bases são iguais e o eixo de um é o dobro do eixo do outro. Com isso:

$$cilindro\ \phi\chi\psi\omega = 2(cilindros\ \beta\delta\phi\psi)\ . \tag{10.35}$$

Temos também que:

$$cilindro\ \phi\chi\psi\omega = 6(cones\ \alpha\beta\delta)\ . \tag{10.36}$$

Combinando a Equação (10.36) com a Equação (10.34) vem que:

$$cilindro\ \phi\chi\psi\omega = \frac{3}{2}(elipsoide)\ . \tag{10.37}$$

Esta equação é a representação matemática da primeira parte deste teorema, expressa pelas seguintes palavras por Arquimedes:

> O cilindro que tem a base igual ao círculo máximo de um elipsoide de revolução e a altura igual ao eixo do elipsoide, é equivalente a uma vez e meia o elipsoide.

### 10.4.1 Importância do Teorema III

Este teorema já era conhecido pelos estudiosos de Arquimedes por aparecer em sua obra *Sobre Conoides e Esferoides*.[27] Nesta obra bem conhecida este teorema é demonstrado de forma puramente geométrica. Foi apenas com a descoberta de *O Método* que ficou evidente que este resultado foi obtido originalmente pela mecânica. Já era conhecida na época de Arquimedes a relação entre o volume do cone e do cilindro circunscrito a ele. Arquimedes obteve então, a partir do equilíbrio representado pela Figura 10.20, juntamente com a lei da alavanca, uma relação entre o volume do elipsoide e do cone inscrito nele. Analogamente obteve uma relação entre o volume do elipsoide e o volume do cilindro circunscrito a ele.

[27] Ver *Sobre Conoides e Esferoides*, Proposição 27, [Mug70, pág. 226].

## 10.5 Demonstração Física do Teorema IV: Volume de um Segmento de Paraboloide de Revolução

Enunciado do teorema:[28]

> Todo segmento de paraboloide cortado por um plano perpendicular ao eixo é uma vez e meia o cone que tem a mesma base e o mesmo eixo que o segmento.

A Figura 10.21 (a) foi utilizada por Arquimedes na demonstração deste teorema. Na Figura 10.21 (b) temos os mesmos corpos vistos em perspectiva.

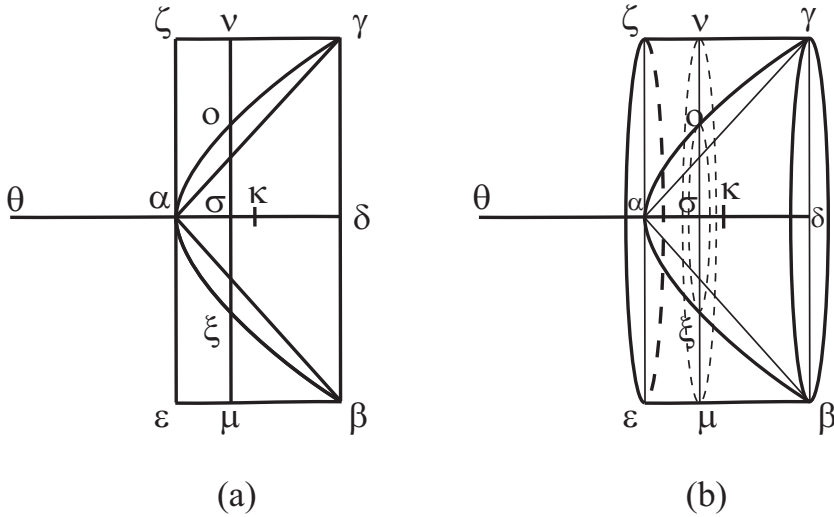



Figura 10.21: (a) Construção geométrica do teorema IV, vista lateral. (b) Vista em perspectiva.

Nesta Figura a parábola $\alpha\beta\gamma$ representa a interseção de um segmento de paraboloide de revolução com o plano do papel. O eixo do segmento de paraboloide e da parábola é $\alpha\delta$.

Seja prolongado $\alpha\delta$ até o ponto $\theta$, de modo que:

$$\alpha\theta = \alpha\delta \ . \tag{10.38}$$

Considere-se $\delta\theta$ como o travessão de uma alavanca do qual $\alpha$ é o ponto médio, que será considerado como fulcro. A base do segmento de paraboloide é o círculo de diâmetro $\beta\gamma$. Seja traçado em um plano perpendicular ao segmento $\alpha\delta$, um círculo com centro $\alpha$ e diâmetro $\varepsilon\zeta$. Este círculo é igual e paralelo ao

[28] Ver a demonstração geométrica deste teorema em *Sobre Conoides e Esferoides*, Proposição 21, [Mug70, pág. 202].

círculo de diâmetro $\beta\gamma$. Seja construído também o cilindro que tenha como bases esses dois círculos e por eixo $\alpha\delta$. Além disso, consideremos o cone cuja base é o círculo de diâmetro $\beta\gamma$ e cujo vértice é o ponto $\alpha$.

Seja traçada no paralelogramo $\zeta\varepsilon\beta\gamma$ uma reta qualquer $\mu\nu$ paralela a $\beta\gamma$ e cruzando o segmento $\alpha\delta$ no ponto $\sigma$. A distância $\alpha\sigma$ será considerada arbitrária por Arquimedes, sendo que na demonstração do teorema irá de $\alpha\sigma = 0$ até $\alpha\sigma = \alpha\delta$. Seja levantado um plano perpendicular ao eixo $\alpha\delta$ passando por $\mu\sigma\nu$. Este plano cortará o cilindro segundo um círculo de diâmetro $\mu\nu$ e o segmento de paraboloide segundo um círculo de diâmetro $\xi o$.

A partir da geometria da Figura 10.21, Arquimedes demonstra a seguinte relação matemática:[29]

$$\frac{\alpha\theta}{\alpha\sigma} = \frac{Q(\mu\sigma)}{Q(\xi\sigma)} = \frac{\mu\sigma \cdot \mu\sigma}{\xi\sigma \cdot \xi\sigma} \ . \tag{10.39}$$

Já vimos nos teoremas anteriores que a razão entre os quadrados de dois segmentos pode ser substituída pela razão entre os círculos cujos diâmetros (ou raios, como neste caso) são esse mesmos segmentos. Logo:

$$\frac{\alpha\theta}{\alpha\sigma} = \frac{\textit{círculo de diâmetro } \mu\nu}{\textit{círculo de diâmetro } \xi o} \ . \tag{10.40}$$

Esta é a relação matemática básica que é utilizada por Arquimedes, juntamente com a lei da alavanca, para demonstrar o presente teorema.

Vejamos agora a dedução física deste teorema.

Neste caso também, como anteriormente, Arquimedes considera os círculos como objetos homogêneos com seus pesos distribuídos uniformemente nas figuras. A Equação (10.40) representa a lei da alavanca em relação ao ponto $\alpha$ como fulcro. Portanto, esta alavanca fica em equilíbrio com o círculo de diâmetro $\xi o$ colocado no ponto $\theta$ e o círculo de diâmetro $\mu\nu$ permanecendo no seu lugar com seu centro de gravidade apoiado em $\sigma$, como representamos na Figura 10.22.

O mesmo raciocínio aplica-se a qualquer outra reta paralela a $\mu\nu$ dentro do paralelogramo $\zeta\varepsilon\beta\gamma$. O cilindro $\zeta\varepsilon\beta\gamma$ é constituído por todos os círculos de diâmetro $\mu\nu$ que vão de $\alpha\sigma = 0$ até $\alpha\sigma = \alpha\delta$. Já o paraboloide $\alpha\beta\gamma$ é constituído por todos os círculos de diâmetro $\xi o$ que vão de $\alpha\sigma = 0$ até $\alpha\sigma = \alpha\delta$. A situação de equilíbrio da Figura 10.22 vale para todos estes círculos. Ao considerar todos estes círculos em conjunto, chegaremos em uma situação de equilíbrio de uma alavanca ao redor de seu fulcro localizado no ponto $\alpha$ na qual o paraboloide $\alpha\beta\gamma$ está atuando sobre o ponto $\theta$, enquanto que o cilindro $\zeta\varepsilon\beta\gamma$ permanece em seu lugar. Esta configuração de equilíbrio está representada na Figura 10.23.

Consideramos agora o ponto $\kappa$ que divide a reta $\alpha\delta$ pela metade. Pelo Lema 8 de *O Método*,[30] este ponto será também o centro de gravidade do cilindro. O Postulado 6 da obra *Sobre o Equilíbrio dos Planos*[31] permite concluir que a

[29] A dedução desta equação encontra-se na Seção A.4 do Apêndice A.

[30] Citado na Seção 10.3, página 84 deste trabalho.

[31] Citado na Subseção 7.1.3, página 47 deste trabalho, ver ainda [Arq08, págs. 215 a 220 e 226].

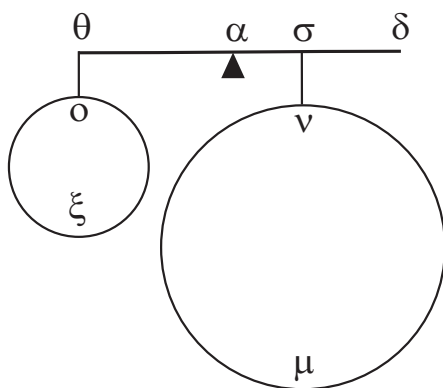



Figura 10.22: Equilíbrio dos círculos sobre a alavanca.

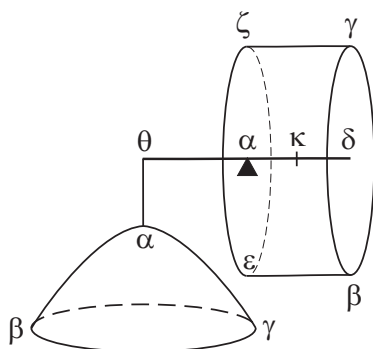



Figura 10.23: Equilíbrio dos sólidos.

alavanca vai continuar em equilíbrio quando o cilindro atua sobre ela apenas por seu centro de gravidade. Isto está representado na Figura 10.24.

A situação de equilíbrio da Figura 10.24 pode ser expressa matematicamente da seguinte forma:

$$\frac{\alpha\theta}{\alpha\kappa} = \frac{cilindro}{segmento\ de\ paraboloide}\ . \tag{10.41}$$

Podemos então concluir a demonstração física do teorema. Por construção temos que

$$\alpha\theta = 2\alpha\kappa\ . \tag{10.42}$$

Logo:

$$cilindro = 2(segmentos\ de\ paraboloide)\ . \tag{10.43}$$

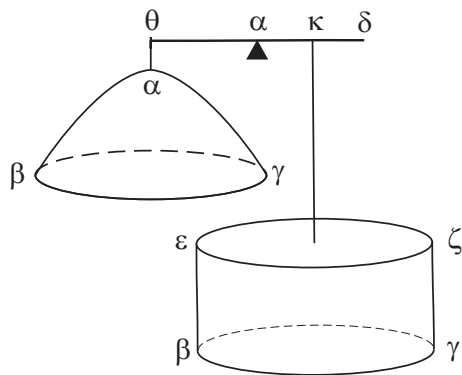



Figura 10.24: Equilíbrio dos sólidos atuando sobre a alavanca por seus centros de gravidade.

Como já foi visto, o cilindro é o triplo do cone com a mesma base e a mesma altura. Portanto, fica claro que:

$$segmento\ de\ paraboloide = \frac{3}{2}(cone\ \alpha\beta\gamma)\ . \tag{10.44}$$

Isto conclui a demonstração física deste teorema.

### 10.5.1 Importância do Teorema IV

Analogamente a quanto já vimos no Teorema anterior, Subseção 10.4.1, Arquimedes neste caso consegue obter uma relação entre o volume do paraboloide e o volume do cone inscrito nele.

## 10.6 Demonstração Física do Teorema V: Centro de Gravidade de um Segmento de Paraboloide de Revolução

Enunciado deste teorema:

> O centro de gravidade de um segmento de paraboloide cortado por um plano perpendicular ao eixo está sobre o seu eixo dividindo-o de modo que a parte do mesmo do lado do vértice é o dobro da parte restante.

A Figura 10.25 (a) foi utilizada por Arquimedes na demonstração deste teorema. Na Figura 10.25 (b) temos uma visão em perspectiva.

A parábola $\alpha\beta\gamma$ representa a interseção de um segmento de paraboloide de revolução com o plano do papel. O eixo do segmento de paraboloide e da parábola é $\alpha\delta$.

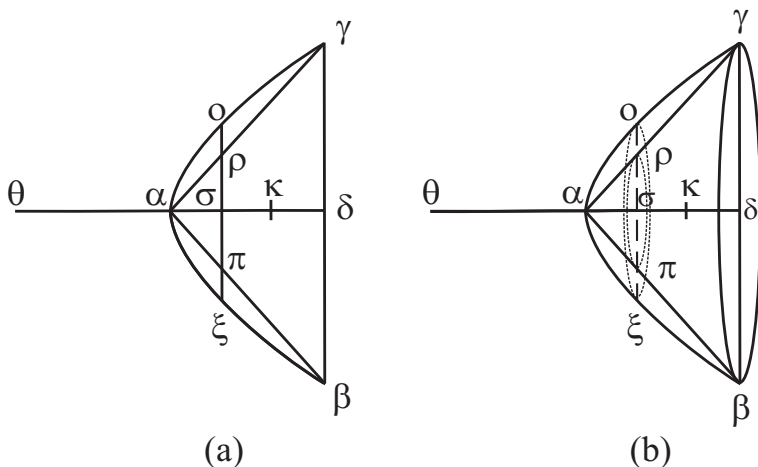



Figura 10.25: Construção geométrica do teorema V. (a) Visão lateral. (b) Visão em perspectiva.

Seja prolongado $\alpha\delta$ até o ponto $\theta$, de modo que:

$$\alpha\theta = \alpha\delta \ . \tag{10.45}$$

Considere-se $\delta\theta$ como o travessão de uma alavanca na qual $\alpha$ é o ponto médio, que será considerado como fulcro. Considere-se também o cone inscrito no segmento de paraboloide, tendo como geratrizes as retas $\alpha\beta$ e $\alpha\gamma$.

Seja traçada na parábola a reta $\xi o$ paralela a $\beta\gamma$, a qual encontra as geratrizes do cone nos pontos $\rho$ e $\pi$, a própria parábola nos pontos $o$ e $\xi$, encontrando o eixo $\alpha\delta$ no ponto $\sigma$. A reta $\xi o$ está a uma distância arbitrária da base $\beta\gamma$. Na prova deste teorema esta distância vai variar de $\alpha\sigma = 0$ até $\alpha\sigma = \alpha\delta$.

Sobre a reta $\xi o$ é levantado um plano perpendicular ao eixo $\alpha\delta$, o qual determina como intersecção nos sólidos, os círculos de diâmetros $\xi o$ e $\pi\rho$.

A partir da geometria da Figura 10.25 Arquimedes demonstra a seguinte relação matemática:[32]

$$\frac{\alpha\theta}{\alpha\sigma} = \frac{Q(\xi\sigma)}{Q(\pi\sigma)} = \frac{\xi\sigma \cdot \xi\sigma}{\pi\sigma \cdot \pi\sigma} \ . \tag{10.46}$$

Mas já vimos nos teoremas anteriores que uma proporção entre quadrados é igual a uma proporção entre os círculos que tenham os raios (ou os diâmetros) respectivamente iguais aos lados dos quadrados. Logo, utilizando a Figura 10.25 podemos escrever a Equação (10.46) como:

$$\frac{\alpha\theta}{\alpha\sigma} = \frac{\textit{círculo de diâmetro } \xi o}{\textit{círculo de diâmetro } \pi\rho} \ . \tag{10.47}$$

[32] A dedução matemática desta equação encontra-se na Seção A.5 do Apêndice A.

Esta é a relação matemática básica que é utilizada por Arquimedes, juntamente com a lei da alavanca, para fazer a demonstração física deste teorema, que apresentamos a seguir.

Consideramos então os círculos como objetos homogêneos com seus pesos distribuídos uniformemente. A Equação (10.47) representa a lei da alavanca, em relação ao ponto $\alpha$ como fulcro. Ou seja, esta alavanca fica em equilíbrio com o círculo de diâmetro $\pi\rho$ colocado no ponto $\theta$ e o círculo de diâmetro $\xi o$ permanecendo no seu lugar apoiado sobre $\sigma$. Esta situação está representada na Figura 10.26.

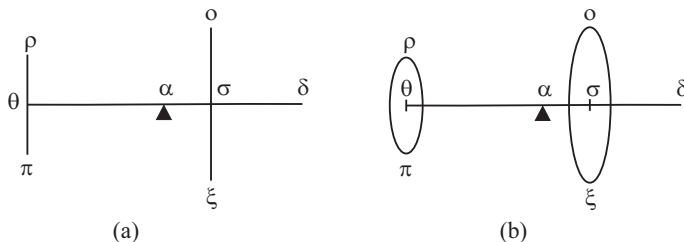



Figura 10.26: Equilíbrio dos círculos na alavanca. (a) Vista de perfil. (b) Vista em perspectiva.

A mesma demonstração é válida para qualquer outra reta paralela a $\beta\delta$ entre $\alpha$ e $\delta$. Se levantarmos sobre ela um plano perpendicular a $\alpha\delta$, então o círculo que é a interseção deste plano com o paraboloide, permanecendo no seu lugar, estará em equilíbrio com o círculo que é a interseção do plano com o cone, transportado para o ponto $\theta$ da alavanca.

Sendo o paraboloide e o cone constituídos por todos os seus respectivos círculos, conclui-se que também estes sólidos estarão em equilíbrio em relação ao ponto $\alpha$, desde que o paraboloide permaneça no seu lugar distribuído sobre o braço da alavanca, enquanto que o cone seja transportado para a esquerda passando a atuar sobre a alavanca apenas sobre o ponto $\theta$, isto é, com o seu centro de gravidade em $\theta$. Esta situação de equilíbrio está representada na Figura 10.27.

Por simetria vem que o centro de gravidade do paraboloide está ao longo do seu eixo de simetria $\alpha\delta$. Vamos chamar de $\kappa$ a este centro de gravidade, como na Figura 10.28. O objetivo de Arquimedes é obter a razão entre $\alpha\kappa$ e $\kappa\delta$, de modo a localizar o ponto $\kappa$. Pelo sexto postulado da obra *Sobre o Equilíbrio dos Planos*[33] vem que se a situação da Figura 10.27 é de equilíbrio, então a alavanca vai continuar em equilíbrio quando o paraboloide está atuando sobre a alavanca apenas sobre o ponto $\kappa$, como indicado na Figura 10.28.

A situação de equilíbrio representada pela Figura 10.28 pode ser expressa matematicamente como:

$$\frac{\alpha\kappa}{\alpha\theta} = \frac{cone}{segmento\ de\ paraboloide} . \quad (10.48)$$

[33] Citado na Subseção 7.1.3, na página 47 deste trabalho.

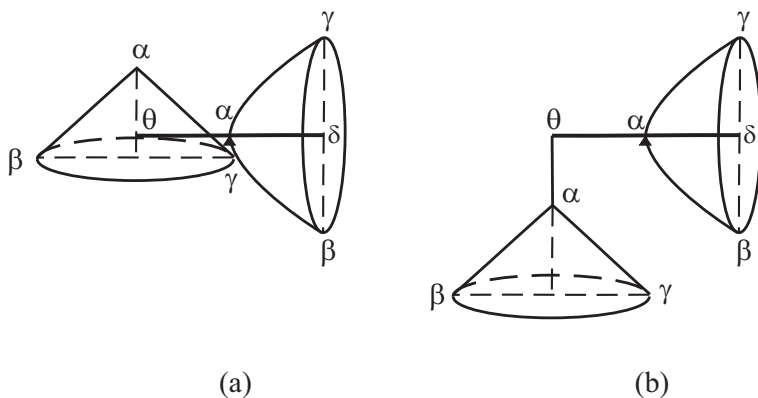



Figura 10.27: (a) Equilíbrio dos sólidos sobre a alavanca ao redor do ponto $\alpha$ com o paraboloide permanecendo em seu lugar distribuído sobre o braço da alavanca, enquanto que o cone está atuando apenas sobre o ponto $\theta$. (b) Mesma situação de equilíbrio com o cone dependurado em $\theta$ por um fio de peso desprezível, com o paraboloide distribuído sobre o braço da alavanca.

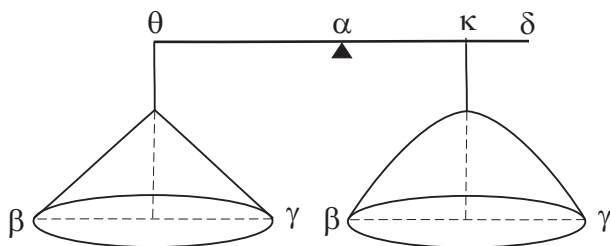



Figura 10.28: Alavanca em equilíbrio ao redor do ponto $\alpha$ com o cone atuando em $\theta$ e o paraboloide atuando em seu centro de gravidade $\kappa$.

Pelo Teorema IV sabemos que:

$$segmento\ de\ paraboloide = \frac{3}{2}(cone) \ . \tag{10.49}$$

Então:

$$\alpha\kappa = \frac{2}{3}\alpha\theta = \frac{2}{3}\alpha\delta \ . \tag{10.50}$$

Como

$$\alpha\kappa + \kappa\delta = \alpha\delta \ , \tag{10.51}$$

podemos concluir a demonstração. Ou seja, combinando as Equações (10.50) e (10.51), concluímos que o centro de gravidade de um segmento de paraboloide de revolução está situado sobre o seu eixo $\alpha\delta$ em um ponto $\kappa$ que o divide como

foi definido no enunciado do teorema. Ou seja, a parte situada do lado do vértice é o dobro da parte restante, ver a Figura 10.25:

$$\alpha\kappa = 2\kappa\delta \ . \tag{10.52}$$

E esta é a formulação matemática do teorema que foi expresso nas seguintes palavras por Arquimedes:

> O centro de gravidade de um segmento de paraboloide cortado por um plano perpendicular ao eixo está sobre o seu eixo dividindo-o de modo que a parte do mesmo do lado do vértice é o dobro da parte restante.

### 10.6.1 Importância do Teorema V

Enfatizamos aqui os aspectos mais relevantes deste Teorema.

- No Teorema I Arquimedes havia obtido a área desconhecida da parábola a partir da área conhecida de um triângulo ao encontrar uma alavanca em equilíbrio com estes dois corpos dependurados por seus centros de gravidade, sabendo a razão entre estas distâncias, Figura 10.6. No Teorema II obteve o volume desconhecido de um sólido a partir do mesmo método, como ilustrado na Figura 10.14. Neste caso ele conhecida os volumes do cilindro e do cone, assim como a lei da alavanca e a razão entre as distâncias $\alpha\kappa$ e $\alpha\theta$. Com isto conseguiu obter o volume da esfera em termos dos volumes dos outros corpos conhecidos. O mesmo procedimento foi obtido no Teorema III para obter o volume de um elipsoide de revolução, assim como no Teorema IV para obter o volume de um paraboloide de revolução. Já no Teorema V obtém pela primeira vez a localização a princípio desconhecida do centro de gravidade de um corpo utilizando o mesmo método. A situação de equilíbrio que ele obteve é representada pela alavanca da Figura 10.28. Neste caso ele conhece a razão entre os volumes do cone e do paraboloide (pelo Teorema IV), mas não sabe a razão de $\alpha\kappa$ para $\alpha\theta$. Porém, pela lei da alavanca, consegue relacionar esta razão desconhecida entre as distâncias com a razão já conhecida entre os volumes. Desta forma obteve a razão entre $\alpha\kappa$ e $\alpha\theta$, localizando assim o centro de gravidade do paraboloide de revolução.

- Este resultado que Arquimedes obteve pela primeira vez é extremamente importante. Ele já era conhecido antes da descoberta do manuscrito de *O Método*. Em seu trabalho *Sobre os Corpos Flutuantes*, que já se encontra traduzido para o português,[34] Arquimedes havia pesquisado as condições de equilíbrio de um paraboloide de revolução flutuando em um fluido. Em particular, analisou para quais ângulos de inclinação do eixo do paraboloide em relação à vertical haveria um equilíbrio estável ou instável do paraboloide. Neste trabalho ele utilizou o centro de gravidade do paraboloide, indicando sua localização exata. Mas até a descoberta de *O*

[34] [Ass96] e [Arq12].

*Método* no início do século XX não se conhecia como Arquimedes havia calculado o centro de gravidade do paraboloide, já que os cálculos para se chegar neste resultado não apareciam em *Sobre os Corpos Flutuantes*, nem nos trabalhos conhecidos de todos os outros matemáticos gregos da antiguidade.[35]

## 10.7 Demonstração Física do Teorema VI: Centro de Gravidade de um Hemisfério

Enunciado do teorema:

> O centro de gravidade de todo hemisfério está sobre o seu eixo, dividindo-o de tal maneira que a razão entre o segmento de reta do lado da superfície e o segmento restante é de cinco para três.

A Figura 10.29 foi apresentada por Mugler na demonstração deste teorema.[36]

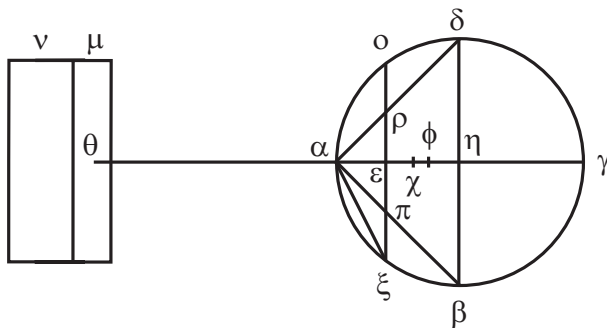



Figura 10.29: Construção geométrica do teorema VI de acordo com Mugler.

Nesta Figura o círculo $\alpha\beta\gamma\delta$ representa o corte de uma esfera no plano do papel. Sejam neste círculo $\alpha\gamma$ e $\beta\delta$ dois diâmetros perpendiculares entre si, cruzando-se no ponto $\eta$. Sejam construídos sobre $\beta\delta$ um plano perpendicular a $\alpha\gamma$, determinando um hemisfério, além de um cone tendo por base o círculo de diâmetro $\beta\delta$, vértice em $\alpha$ e geratrizes $\alpha\beta$ e $\alpha\delta$. Seja prolongada $\alpha\gamma$ até o ponto $\theta$, fazendo

$$\alpha\theta = \alpha\gamma \ . \tag{10.53}$$

Arquimedes considera $\gamma\theta$ como sendo o travessão de uma alavanca da qual $\alpha$ é o ponto médio, que será considerado como fulcro.

Seja traçada no semicírculo $\alpha\beta\delta$ uma reta qualquer $\xi o$ paralela a $\beta\delta$, a qual encontrará a circunferência nos pontos $o$ e $\xi$, as geratrizes do cone em $\rho$ e $\pi$,

[35] Ver [Arc02a, pág. 265].
[36] [Mug71b, pág. 102].

assim como a reta $\alpha\gamma$ no ponto $\varepsilon$. Sobre a reta $\xi o$ seja levantado um plano perpendicular a $\alpha\varepsilon$. Este plano cortará o hemisfério segundo um círculo de diâmetro $\xi o$ e o cone segundo um círculo de diâmetro $\pi\rho$.

A partir da geometria da Figura 10.29 Arquimedes demonstra a seguinte relação matemática:[37]

$$\frac{\alpha\gamma}{\alpha\varepsilon} = \frac{Q(\varepsilon\xi) + Q(\varepsilon\pi)}{Q(\varepsilon\pi)} = \frac{\varepsilon\xi \cdot \varepsilon\xi + \varepsilon\pi \cdot \varepsilon\pi}{\varepsilon\pi \cdot \varepsilon\pi} \ . \tag{10.54}$$

Mas a razão entre quadrados é a mesma razão que existe entre as áreas dos círculos cujos diâmetros são os lados dos quadrados. Além disso:

$$\alpha\gamma = \alpha\theta \ . \tag{10.55}$$

Portanto, com a Figura 10.29:

$$\frac{\alpha\theta}{\alpha\varepsilon} = \frac{(\textit{círculo de diâmetro } \xi o) + (\textit{círculo de diâmetro } \pi\rho)}{\textit{círculo de diâmetro } \pi\rho} \ . \tag{10.56}$$

O que foi apresentado até aqui contém a relação matemática básica necessária para a prova deste teorema, cuja demonstração física veremos a seguir.

Arquimedes considera a Equação (10.56) como representando uma alavanca em equilíbrio ao redor do ponto $\alpha$. Ou seja, ela fica em equilíbrio com os dois círculos de diâmetro $\xi o$ e $\pi\rho$ permanecendo em seus lugares atuando em $\varepsilon$, juntamente com o círculo de diâmetro $\pi\rho$ colocado em $\theta$, como mostrado na Figura 10.30.

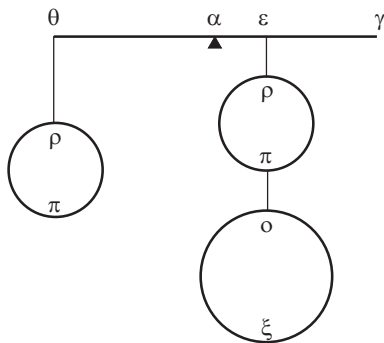



Figura 10.30: Equilíbrio de uma alavanca ao redor de $\alpha$.

Sendo o plano $\xi o$ um plano qualquer entre $\alpha$ e $\eta$, o mesmo raciocínio aplica-se a todos os círculos de interseção com o hemisfério. O cone é constituído por todos os círculos de diâmetro $\pi\rho$, enquanto que o hemisfério é constituído por todos os círculos de diâmetro $\xi o$. Ao considerar todos os círculos na região que vai de $\alpha\varepsilon = 0$ até $\alpha\varepsilon = \alpha\eta$, acabamos com o equilíbrio de três sólidos em uma

[37] A demonstração matemática desta equação encontra-se na Seção A.6 do Apêndice A.

alavanca com fulcro em $\alpha$ como mostrado na Figura 10.31. Ou seja, com um cone $\alpha\beta\delta$ transportando para $\theta$, juntamente com o cone $\alpha\beta\delta$ e o hemisfério $\alpha\beta\delta$ permanecendo em seus lugares.

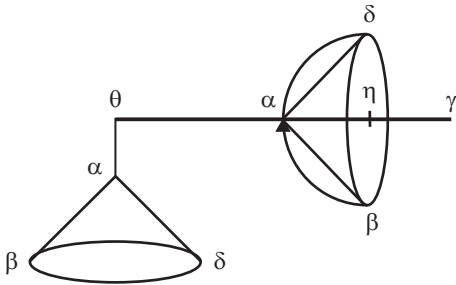



Figura 10.31: Alavanca com três sólidos em equilíbrio ao redor do ponto $\alpha$.

Arquimedes considera então um cilindro $\mu\nu$ com mesmo volume e peso que o cone $\alpha\beta\delta$, como ilustrado na Figura 10.32.

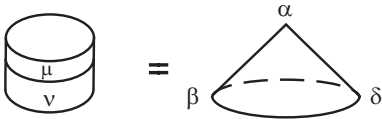



Figura 10.32: Cilindro $\mu\nu$ de mesmo volume e peso que o cone $\alpha\beta\delta$.

A alavanca da Figura 10.31 vai continuar em equilíbrio ao redor do ponto $\alpha$ se substituirmos o cone atuando em $\theta$ por este cilindro $\mu\nu$ de mesmo volume que o cone, desde que o centro de gravidade do cilindro também esteja atuando em $\theta$. Isto está representado na Figura 10.33.

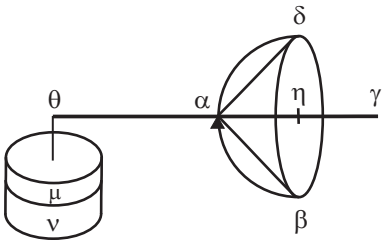



Figura 10.33: Alavanca com três sólidos em equilíbrio ao redor do ponto $\alpha$.

Por este motivo não nos parece que a Figura 10.29 apresentada por Mugler seja uma boa representação da situação física de equilíbrio. Na Figura de Mugler o centro de gravidade do cilindro $\mu$ está localizado em $\theta$, enquanto que o centro de gravidade do cilindro $\nu$ está fora de $\theta$, o que desequilibraria a alavanca e não permitiria a continuidade do raciocínio físico. Na Figura 10.34 apresentamos a

nossa interpretação física da situação descrita neste teorema. Neste caso temos os centros de gravidade dos cilindros $\mu$ e $\nu$ atuando verticalmente abaixo de $\theta$. Uma discussão sobre estas figuras é apresentada no Apêndice D, Seção D.2.

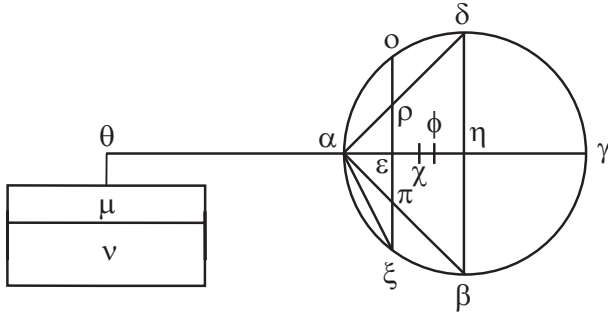



Figura 10.34: A figura do Teorema VI apresentada em nosso trabalho.

Corte-se esse cilindro $\mu\nu$ por um plano perpendicular ao eixo, obtendo dois cilindros, $\mu$ e $\nu$ que, ao atuarem separadamente sobre o ponto $\theta$, satisfazem às seguintes condições de equilíbrio da alavanca em relação ao ponto $\alpha$: o cilindro $\mu$ sozinho equilibra o cone $\alpha\beta\delta$ permanecendo em seu lugar, enquanto que o cilindro $\nu$ sozinho equilibra o hemisfério $\alpha\beta\delta$ permanecendo em seu lugar, como ilustrado na Figura 10.35.

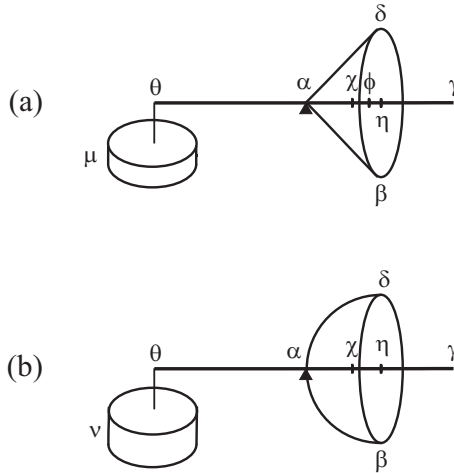



Figura 10.35: Alavancas em equilíbrio ao redor do ponto $\alpha$: (a) O cilindro $\mu$ equilibra o cone $\alpha\beta\delta$ permanecendo em seu lugar. (b) O cilindro $\nu$ equilibra o hemisfério $\alpha\beta\delta$ permanecendo em seu lugar.

Consideramos sobre $\alpha\eta$ da Figura 10.35 (a) um ponto $\phi$ satisfazendo às seguintes relações:

$$\alpha\phi = 3\phi\eta \ , \tag{10.57}$$

e

$$\alpha\phi + \phi\eta = \alpha\eta \ . \tag{10.58}$$

O Lema 10 de *O Método* afirma que:

> O centro de gravidade de todo cone está situado sobre o eixo, dividindo-o de modo que o segmento próximo do vértice seja o triplo do restante.

Não se encontra a prova deste Lema nas obras de Arquimedes que chegaram até nós. Knorr apresentou uma reconstrução desta demonstração seguindo a linha de raciocínio geométrica de Arquimedes.[38] No Apêndice F apresentamos nosso cálculo do centro de gravidade do cone com o próprio método mecânico de Arquimedes utilizando alavancas em equilíbrio em relação ao solo.

Por este Lema vem que o ponto $\phi$ é o centro de gravidade do cone. Pelo sexto postulado da obra *Sobre o Equilíbrio dos Planos*[39] sabemos que a situação da Figura 10.35 (a) vai continuar em equilíbrio com o cone $\alpha\beta\delta$ atuando sobre a alavanca apenas por seu centro de gravidade localizado em $\phi$, como indicado na Figura 10.36.

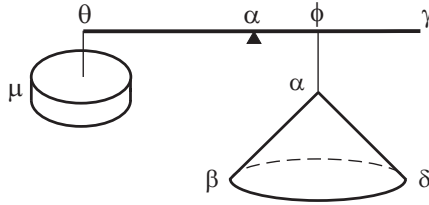



Figura 10.36: O cilindro $\mu$, ao atuar em $\theta$, equilibra a alavanca ao redor do ponto $\alpha$ com o cone $\alpha\beta\delta$ atuando em $\phi$.

Pela lei da alavanca o equilíbrio representado na Figura 10.36 pode ser expresso como:

$$\frac{cone\ \alpha\beta\delta}{cilindro\ \mu} = \frac{\alpha\theta}{\alpha\phi} \ . \tag{10.59}$$

[38] [Kno79a].

[39] Citado na Subseção 7.1.3, na página 47 deste trabalho.

Temos ainda que:

$$\alpha\theta = \alpha\gamma = 2\alpha\eta \ . \tag{10.60}$$

Usando as Equações (10.57), (10.58) e (10.60) na Equação (10.59) obtemos:

$$\frac{cone\ \alpha\beta\delta}{cilindro\ \mu} = \frac{\alpha\theta}{\alpha\phi} = \frac{8}{3} \ . \tag{10.61}$$

Consideramos agora um outro ponto $\chi$ na Figura 10.35 (b) satisfazendo à seguinte relação:

$$\frac{\alpha\eta}{\alpha\chi} = \frac{8}{5} \ . \tag{10.62}$$

Então:

$$\alpha\eta = \alpha\chi + \eta\chi \ . \tag{10.63}$$

Substituindo a Equação (10.63) na Equação (10.62) vem:

$$\frac{\alpha\chi + \eta\chi}{\alpha\chi} = \frac{8}{5} \ . \tag{10.64}$$

Pelas propriedades das proporções[40] temos:

$$\frac{\alpha\chi + \eta\chi - \alpha\chi}{\alpha\chi} = \frac{8-5}{5} = \frac{3}{5} = \frac{\eta\chi}{\alpha\chi} \ . \tag{10.65}$$

A partir destas considerações Arquimedes encontra a localização de centro de gravidade do hemisfério por meio de deduções físicas e matemáticas alternadamente, como podemos acompanhar a seguir.

O cilindro $\mu\nu$ foi construído como sendo equivalente ao cone $\alpha\beta\delta$, ou seja, ambos possuem o mesmo volume. Portanto, utilizando a Equação (10.61), temos que:

$$\frac{cilindro\ \mu}{cone\ \alpha\beta\delta} = \frac{cilindro\ \mu}{cilindro\ \mu\nu} = \frac{cilindro\ \mu}{(cilindro\ \mu) + \ (cilindro\ \nu)} = \frac{3}{8} \ . \tag{10.66}$$

Desta equação vem que:

$$5(cilindros\ \mu) = 3(cilindros\ \nu) \ . \tag{10.67}$$

Pelas propriedades das proporções,[41] ou então utilizando diretamente as Equações (10.66) e (10.67), vem que:

$$\frac{cilindro\ \nu}{cilindro\ \mu\nu} = \frac{5}{8} \ . \tag{10.68}$$

[40] Ver a Equação (8.23).

[41] Ver as Equações (8.21) e (8.27).

Mas o cilindro $\mu\nu$ é equivalente ao cone $\alpha\beta\delta$. Portanto:

$$\frac{cone\ \alpha\beta\delta}{cilindro\ \nu} = \frac{8}{5}\ . \tag{10.69}$$

Mas no início da demonstração Arquimedes tomou o ponto $\chi$ de modo que os segmentos $\alpha\eta$ e $\alpha\chi$ satisfizessem à razão de 8/5. Portanto, podemos substituir na Equação (10.69) a razão 8/5 por $\alpha\eta/\alpha\chi$ obtendo:

$$\frac{cone\ \alpha\beta\delta}{cilindro\ \nu} = \frac{\alpha\eta}{\alpha\chi}\ . \tag{10.70}$$

Foi visto no Teorema II que a esfera é o quádruplo do cone que tem por base o círculo máximo $\beta\delta$ e por eixo (altura) o seu raio $\alpha\eta$. Então o hemisfério é o dobro do cone $\alpha\beta\delta$. Combinando estes resultados vem que:

$$\frac{hemisfério}{cone\ \alpha\beta\delta} = \frac{2}{1} = \frac{\alpha\theta}{\alpha\eta}\ , \tag{10.71}$$

pois $\alpha\theta$ é o dobro de $\alpha\eta$ por construção. Portanto, multiplicando membro a membro as duas últimas Equações temos:

$$\frac{hemisfério}{cilindro\ \nu} = \frac{\alpha\theta}{\alpha\chi}\ . \tag{10.72}$$

Mas essa é a lei da alavanca com fulcro em $\alpha$. Portanto, esta alavanca fica em equilíbrio com o cilindro $\nu$ atuando sobre $\theta$, juntamente com o hemisfério atuando em $\chi$, como ilustrado na Figura 10.37.

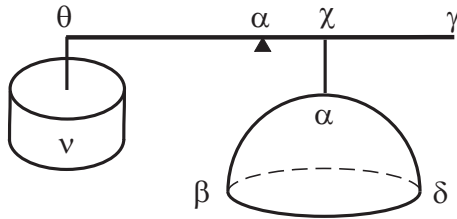



Figura 10.37: O cilindro $\nu$, ao atuar em $\theta$, equilibra a alavanca ao redor do ponto $\alpha$ com o hemisfério $\alpha\beta\delta$ atuando em $\chi$.

Concluímos então, pelo Postulado 6 da obra *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, que o centro de gravidade do hemisfério é realmente o ponto $\chi$. As características deste ponto $\chi$ foram definidas pela Equação (10.62), a partir da qual deduzimos a Equação (10.65), a saber:

$$\frac{\alpha\chi}{\eta\chi} = \frac{5}{3}\ . \tag{10.73}$$

Esta é a formulação matemática deste sexto teorema de *O Método*.

### 10.7.1 Importância do Teorema VI

- Novamente vimos Arquimedes utilizando seu método para calcular o centro de gravidade de um corpo.

- Sabia-se que Arquimedes havia calculado o centro de gravidade não apenas de um hemisfério, mas de qualquer segmento esférico, já que utilizou estes resultados para estudar o equilíbrio de um corpo com este formato flutuando em um líquido em seu trabalho *Sobre os Corpos Flutuantes*.[42] Infelizmente o final da primeira parte deste trabalho chegou mutilada até nós, faltando a maior parte da obra. Com a descoberta de *O Método* ficou-se sabendo pelo menos como ele havia calculado o centro de gravidade de qualquer segmento esférico.

## 10.8 Demonstração Física do Teorema VII: Volume de um Segmento Esférico

Enunciado do Teorema:[43]

> A razão entre todo segmento esférico e o cone que tem a mesma base e o mesmo eixo do segmento, é igual à razão da soma do raio da esfera com a altura do segmento restante, para a altura do segmento restante.

A Figura 10.38 representa com $\alpha\beta\gamma\delta$ o círculo máximo de uma esfera, sendo $\alpha\gamma$ e $\tau\upsilon$ dois diâmetros perpendiculares. Corta-se a esfera pelo ponto $\eta$ com um plano perpendicular ao segmento de reta $\alpha\gamma$ definindo assim um segmento esférico cuja base é o círculo de diâmetro $\beta\delta$. Sobre este círculo é construído um cone com vértice em $\alpha$.

Além disso, tendo como base o círculo de diâmetro $\tau\upsilon$, seja construído um outro cone também com vértice em $\alpha$. Seja prolongada a superfície lateral deste cone até encontrar o plano passando por $\beta\delta$ e perpendicular ao eixo $\alpha\gamma$. Esta interseção será o círculo de diâmetro $\varepsilon\zeta$.

Neste mesmo plano passando por $\beta\delta$ e perpendicular ao eixo $\alpha\gamma$ seja também construído um círculo com centro em $\eta$ e raio igual a $\alpha\gamma$. O seu diâmetro está indicado na figura como $\kappa\lambda$. Sobre este círculo seja construído um cilindro cujo eixo é $\alpha\eta$. O corte deste cilindro no plano do papel é então representado pelo paralelogramo $\psi\kappa\lambda$.[44]

Agora Arquimedes prolonga o eixo do segmento esférico $\alpha\gamma$ dos dois lados. Este prolongamento é feito de um lado com o segmento de reta $\gamma\omega$ igual ao raio

---

[42] Tradução para o português em [Ass96] e [Arq12].

[43] A demonstração geométrica deste teorema pode ser encontrada em *Sobre a Esfera e o Cilindro*, Livro II, Proposição 2, [Mug70, pág. 104].

[44] A descrição da construção geométrica foi perdida no original grego, tendo sido reconstituída por Heiberg. Neste ponto aparece uma incoerência na reconstituição ou na tradução feita por Mugler, pois o paralelogramo é chamado de $\phi\lambda$. Mas este ponto $\phi$ está claramente definido no texto grego, sendo localizado sobre o eixo e não como vértice do paralelogramo. Para evitar as dúvidas que naturalmente surgiriam ao indicar dois pontos com o mesmo símbolo, optamos por identificar um dos vértices do paralelogramo com o simbolo $\psi$.

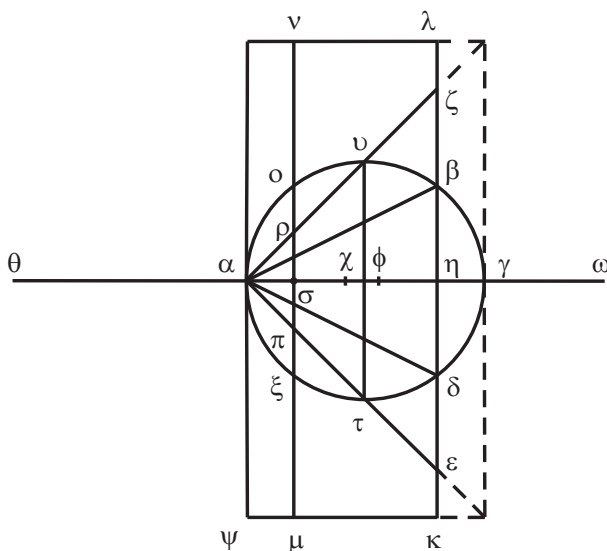



Figura 10.38: Representação geométrica do Teorema VII.

da esfera e do outro lado, como de costume, com um segmento $\alpha\theta$ igual a $\alpha\gamma$. O segmento $\gamma\theta$ será considerado uma alavanca com fulcro em $\alpha$.

Dentro do paralelogramo $\psi\kappa\lambda$ traça-se a reta $\mu\nu$ paralela a $\beta\delta$. Esta reta $\mu\nu$ está a uma distância arbitrária de $\kappa\lambda$. Sobre a reta $\mu\nu$ levanta-se um plano perpendicular ao eixo $\alpha\gamma$. Este plano corta o cilindro segundo um círculo de diâmetro $\mu\nu$, o segmento esférico segundo um círculo de diâmetro $\xi o$, assim como o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ segundo um círculo de diâmetro $\pi\rho$.

Aqui observamos que a Figura deste teorema é muito semelhante àquela já construída no Teorema II, Figura 10.10 (a). A dedução matemática das equações que vão ser utilizadas na lei da alavanca aplica-se também às figuras geométricas deste teorema. Podemos usar então como ponto de partida da demonstração física a mesma Equação (10.12), a saber:

$$\frac{\alpha\theta}{\alpha\sigma} = \frac{\textit{Círculo de diâmetro } \mu\nu}{(\textit{Círculo de diâmetro } \xi o) + (\textit{Círculo de diâmetro } \pi\rho)} \ . \tag{10.74}$$

A situação de equilíbrio representada pela Equação (10.74) é indicada na Figura 10.39.

Portanto, a Figura 10.39 representa o equilíbrio, em relação ao ponto $\alpha$, entre os círculos homogêneos e uniformes que são as interseções dos sólidos considerados. O cilindro, o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ e o segmento esférico $\alpha\beta\delta$ são constituídos por todos os seus respectivos círculos. Aplicando a mesma condição de equilíbrio da Figura 10.39 para todos os círculos entre $\alpha\sigma = 0$ até $\alpha\sigma = \alpha\eta$ obtemos os três sólidos em equilíbrio em relação ao ponto $\alpha$, com o cilindro permanecendo

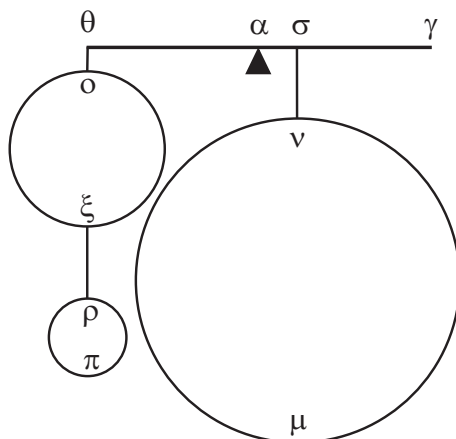



Figura 10.39: Alavanca em equilíbrio ao redor do fulcro $\alpha$ com o círculo de diâmetro $\mu\nu$ permanecendo com seu centro de gravidade em $\sigma$, juntamente com os círculos de diâmetro $\xi o$ e $\pi\rho$ com seus centros de gravidade deslocados para $\theta$.

no seu lugar, enquanto o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ e o segmento esférico são transportados com seus centros de gravidade atuando sobre o ponto $\theta$, como na Figura 10.40.

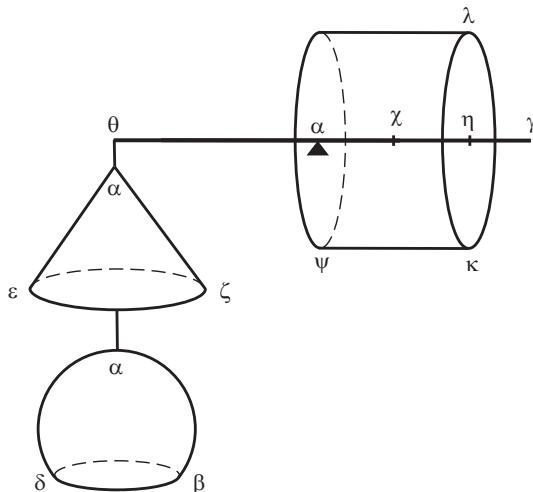



Figura 10.40: Equilíbrio da alavanca ao redor do fulcro $\alpha$ com o cilindro permanecendo em seu lugar, enquanto que o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ e o segmento esférico são transportados com seus centros de gravidade atuando sobre o ponto $\theta$.

Para continuar o estudo do equilíbrio dos sólidos sobre a alavanca, Arquimedes define agora dois pontos sobre o eixo $\alpha\eta$, a saber, $\chi$ e $\phi$, tais que:

$$\alpha\chi = \eta\chi \ , \tag{10.75}$$

e

$$\eta\phi = \frac{\alpha\eta}{3} \ . \tag{10.76}$$

Com essas definições, $\chi$ é o centro de gravidade do cilindro pelo Lema 8 de *O Método* citado na Seção 10.3, página 84 deste trabalho. Assim podemos ver o equilíbrio entre os sólidos com a situação representada na Figura 10.41.

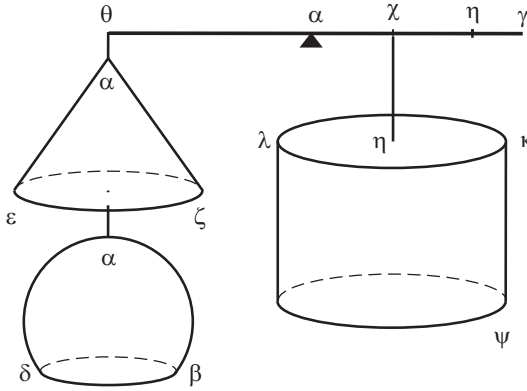



Figura 10.41: Equilíbrio da alavanca ao redor do fulcro $\alpha$ com o cilindro dependurado pelo ponto $\chi$ (que é o ponto médio de $\alpha\eta$) através de seu centro de gravidade, enquanto que o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ e o segmento esférico são transportados com seus centros de gravidade atuando sobre o ponto $\theta$.

Partindo destas considerações e da condição de equilíbrio da alavanca, podemos então escrever:

$$\frac{\alpha\theta}{\alpha\chi} = \frac{Cilindro}{(Cone\ \alpha\varepsilon\zeta) + (Segmento\ esf\acute{e}rico\ \alpha\beta\delta)} \ . \tag{10.77}$$

Invertemos a Equação (10.77) e substituímos $\alpha\theta$ por $\alpha\gamma$, que são iguais entre si por construção. Multiplicamos também o numerador e o denominador do primeiro membro por $\alpha\gamma$, obtendo:

$$\frac{(Cone\ \alpha\varepsilon\zeta) + (Segmento\ esf\acute{e}rico\ \alpha\beta\delta)}{Cilindro} = \frac{\alpha\chi}{\alpha\gamma} = \frac{\alpha\chi \cdot \alpha\gamma}{\alpha\gamma \cdot \alpha\gamma} \ . \tag{10.78}$$

Por construção temos que:

$$\varepsilon\eta = \alpha\eta \ , \tag{10.79}$$

e

$$\eta\lambda = \alpha\gamma \ . \tag{10.80}$$

Considerando agora as Equações (10.79) e (10.80), assim como as proporções existentes entre cones e cilindros de mesma altura, como estão apresentadas por Euclides,[45] podemos escrever:

$$\frac{Cilindro}{Cone\ \alpha\varepsilon\zeta} = \frac{Q(\eta\lambda)}{\frac{1}{3}Q(\varepsilon\eta)} = \frac{Q(\alpha\gamma)}{\frac{1}{3}Q(\alpha\eta)} \ . \tag{10.81}$$

Essa equação também pode ser escrita como:

$$\frac{Cilindro}{Cone\ \alpha\varepsilon\zeta} = \frac{\eta\lambda \cdot \eta\lambda}{\frac{1}{3}(\varepsilon\eta \cdot \varepsilon\eta)} = \frac{\alpha\gamma \cdot \alpha\gamma}{\frac{1}{3}(\alpha\eta \cdot \alpha\eta)} \ . \tag{10.82}$$

Por construção temos que:

$$\alpha\chi = \frac{1}{2}\alpha\eta \ . \tag{10.83}$$

Utilizando a Equação (10.83) e multiplicando membro a membro as Equações (10.78) e (10.81) obtemos então a seguinte relação:

$$\frac{(Cone\ \alpha\varepsilon\zeta)\ +\ (Segmento\ esf\acute{e}rico\ \alpha\beta\delta)}{Cone\ \alpha\varepsilon\zeta}$$

$$= \frac{\alpha\chi \cdot \alpha\gamma}{\frac{1}{3}Q(\alpha\eta)} = \frac{\alpha\chi \cdot \alpha\gamma}{\frac{1}{3}(\alpha\eta \cdot \alpha\eta)} = \frac{\frac{1}{2}\alpha\gamma}{\frac{1}{3}\alpha\eta} \ . \tag{10.84}$$

Com base nas propriedades das proporções,[46] e pela Equação (10.84) obtemos que:

$$\frac{Segmento\ esf\acute{e}rico\ \alpha\beta\delta}{Cone\ \alpha\varepsilon\zeta} = \frac{\frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{3}\alpha\eta}{\frac{1}{3}\alpha\eta} \ . \tag{10.85}$$

Lembramos agora que cones da mesma altura são proporcionais às respectivas bases.[47] Por outro lado, as bases destes cones, sendo círculos, são proporcionais aos quadrados de seus diâmetros (ou raios), conforme a Proposição 2 do Livro XII de *Os Elementos* de Euclides:[48]

> Os círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros.

---

[45] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XII, Proposições 10 e 11, citadas na Seção 10.4, página 94 deste trabalho, ver ainda [Euc56a, Vol. 3, pág. 400 a 409] e [Euc09, pág. 543 a 549].

[46] Ver a Equação (8.23).

[47] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XII, Proposição 11, citada na Seção 10.4, página 94 deste trabalho.

[48] [Euc09, pág. 528].

Utilizando estes resultados obtemos que:

$$\frac{Cone\ \alpha\varepsilon\zeta}{Cone\ \alpha\beta\delta} = \frac{Q(\varepsilon\eta)}{Q(\delta\eta)} = \frac{\varepsilon\eta \cdot \varepsilon\eta}{\delta\eta \cdot \delta\eta} \ . \tag{10.86}$$

Pela Equação (10.75) temos:

$$\varepsilon\eta = \alpha\eta \ . \tag{10.87}$$

Pela propriedade dos triângulos retângulos temos que:[49]

$$Q(\delta\eta) = \delta\eta \cdot \delta\eta = \alpha\eta \cdot \gamma\eta \ . \tag{10.88}$$

Substituindo a Equação (10.88) na Equação (10.86) vem que:

$$\frac{Cone\ \alpha\varepsilon\zeta}{Cone\ \alpha\beta\delta} = \frac{Q(\alpha\eta)}{\alpha\eta \cdot \gamma\eta} = \frac{\alpha\eta \cdot \alpha\eta}{\alpha\eta \cdot \gamma\eta} = \frac{\alpha\eta}{\gamma\eta} \ . \tag{10.89}$$

Ou ainda, dividindo por 3 o numerador e o denominador do último membro, obtemos:

$$\frac{Cone\ \alpha\varepsilon\zeta}{Cone\ \alpha\beta\delta} = \frac{\frac{1}{3}\alpha\eta}{\frac{1}{3}\gamma\eta} \ . \tag{10.90}$$

Multiplicando membro a membro as Equações (10.85) e (10.90) podemos concluir:

$$\frac{Segmento\ esf\acute{e}rico\ \alpha\beta\delta}{Cone\ \alpha\beta\delta} = \frac{\frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{3}\alpha\eta}{\frac{1}{3}\gamma\eta} \ . \tag{10.91}$$

Ou:

$$\frac{Segmento\ esf\acute{e}rico\ \alpha\beta\delta}{Cone\ \alpha\beta\delta} = \frac{\frac{3}{2}\alpha\gamma - \alpha\eta}{\gamma\eta} \ . \tag{10.92}$$

Sendo:

$$\alpha\gamma = \alpha\eta + \gamma\eta \ , \tag{10.93}$$

temos que:

$$\frac{3}{2}\alpha\gamma - \alpha\eta = \frac{1}{2}\alpha\gamma + \alpha\gamma - \alpha\eta = \frac{1}{2}\alpha\gamma + \alpha\eta + \gamma\eta - \alpha\eta = \frac{1}{2}\alpha\gamma + \gamma\eta \ . \tag{10.94}$$

Então, substituindo este resultado na Equação (10.92):

$$\frac{Segmento\ esf\acute{e}rico\ \alpha\beta\delta}{Cone\ \alpha\beta\delta} = \frac{\frac{1}{2}\alpha\gamma + \gamma\eta}{\gamma\eta} \ . \tag{10.95}$$

Mas $\frac{1}{2}\alpha\gamma$ é o raio da esfera. Isto conclui a demonstração do teorema, já que a Equação (10.95) é a representação matemática daquilo que foi apresentado por Arquimedes nas seguintes palavras (ver ainda a Figura 10.38):

[49] Ver o Apêndice C.

> A razão entre todo segmento esférico e o cone que tem a mesma base e o mesmo eixo do segmento, é igual à razão da soma do raio da esfera com a altura do segmento restante, para a altura do segmento restante.

### 10.8.1 Importância do Teorema VII

A demonstração geométrica deste Teorema devido a Arquimedes era conhecida de sua obra *Sobre a Esfera e o Cilindro*.[50] Foi com a descoberta de *O Método* que ficamos sabendo que Arquimedes havia obtido este resultado originalmente utilizando a mecânica para só então encontrar a demonstração geométrica. A demonstração mecânica utiliza essencialmente o equilíbrio representado pela Figura 10.41, a lei da alavanca, a razão entre as distâncias $\alpha\chi$ e $\alpha\theta$, assim como a razão entre os volumes do cone e do cilindro.

## 10.9 Teorema VIII: Volume de um Segmento de Elipsoide de Revolução

Esse Teorema afirma que:

> *todo segmento de elipsoide cortado por um plano perpendicular [ao eixo] tem, em relação ao cone que tem a mesma base e o mesmo eixo que o segmento, a mesma razão que a soma da metade do eixo do elipsoide e do eixo do segmento oposto, [tem] para o eixo do segmento oposto.*

Arquimedes não apresentou a demonstração deste teorema pelo seu método, por considerar que seria equivalente à demonstração do teorema anterior. Contudo, uma demonstração geométrica foi desenvolvida por ele próprio em outro livro. Ver *Sobre Conoides e Esferoides*, Proposições 29 e 31, [Mug70, págs. 235 e 244].

## 10.10 Demonstração Física do Teorema IX: Centro de Gravidade de um Segmento Esférico

Enunciado do teorema:

> O centro de gravidade de todo segmento esférico está sobre o eixo do segmento, dividindo-o de tal maneira que a razão entre a parte do mesmo do lado do vértice do segmento, e a parte restante, é a mesma [razão] que a soma do eixo do segmento e o quádruplo do eixo do segmento oposto, com a soma do eixo do segmento e o dobro do eixo do segmento oposto.

Na Figura 10.42 temos a construção geométrica apresentada por Mugler para a demonstração deste teorema.[51]

[50] Ver *Sobre a Esfera e o Cilindro*, Livro II, Proposição 2, [Mug70, pág. 104].
[51] [Mug71b, pág. 109].

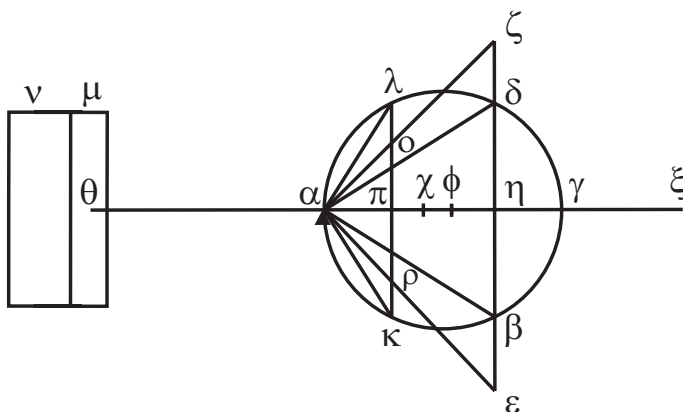



Figura 10.42: Representação em corte do segmento esférico, dos cones e cilindros.

Por simplicidade de notação vamos representar $Q(\alpha\beta)$ como sendo o quadrado de lado $\alpha\beta$, isto é, $\mathrm{Q}(\alpha\beta) = \alpha\beta \cdot \alpha\beta$. Da mesma forma vamos representar $R(\gamma\delta,\ \varepsilon\zeta)$ como sendo o retângulo de lados $\gamma\delta$ e $\varepsilon\zeta$, isto é, $R(\gamma\delta,\ \varepsilon\zeta) = \gamma\delta \cdot \varepsilon\zeta$.

Na Figura 10.42 o círculo $\alpha\beta\gamma\delta$ de diâmetro $\alpha\gamma$ representa o corte de uma esfera por um plano passando pelo centro. Cortamos essa esfera pelo ponto $\eta$ com um plano perpendicular ao diâmetro $\alpha\gamma$, obtendo como interseção o segmento esférico $\alpha\beta\delta$ cuja base é o círculo de diâmetro $\beta\delta$. Com essa construção, o diâmetro $\beta\delta$ é perpendicular ao diâmetro $\alpha\gamma$ e o divide nas partes $\alpha\eta$ e $\gamma\eta$. A altura do segmento esférico que nos interessa é $\alpha\eta$. O seu complemento em relação ao diâmetro da esfera é $\gamma\eta$.

Arquimedes define agora, ao longo de $\alpha\eta$, um ponto $\chi$ satisfazendo à seguinte relação:

$$\frac{\alpha\chi}{\eta\chi} = \frac{\alpha\eta + 4\gamma\eta}{\alpha\eta + 2\gamma\eta} \ . \tag{10.96}$$

De acordo com o enunciado do teorema, afirma então o seguinte:

> *Digo que o ponto $\chi$ é o centro de gravidade do segmento esférico cujo vértice é o ponto $\alpha$...*

A construção da Figura 10.42 continua ainda com o prolongamento do diâmetro $\alpha\gamma$ dos dois lados da esfera. De um lado prolonga-se $\alpha\theta$, de modo que:

$$\alpha\theta = \alpha\gamma \ . \tag{10.97}$$

Do outro lado prolonga-se $\gamma\xi$ igual ao raio da esfera.

Imaginamos, sempre de acordo com o método de Arquimedes, que $\gamma\theta$ seja uma alavanca da qual $\alpha$ é o ponto médio, que será considerado como fulcro.

Arquimedes completa a Figura construindo um segundo círculo no plano que determina a base do segmento esférico. Este círculo tem centro em $\eta$ e raio dado por

$$\zeta\eta = \varepsilon\eta = \alpha\eta \; . \tag{10.98}$$

O diâmetro deste segundo círculo está indicado na Figura 10.42 como sendo dado por:

$$\varepsilon\zeta = 2\alpha\eta \; . \tag{10.99}$$

Sobre este segundo círculo construímos o cone que tem como vértice o ponto $\alpha$ e como geratrizes as retas $\alpha\varepsilon$ e $\alpha\zeta$.

Na demonstração do teorema Arquimedes usa também o cone com vértice no ponto $\alpha$ e cuja base é o círculo de diâmetro $\beta\delta$, que é a mesma base do segmento esférico. Este cone também está representado na Figura 10.42, mas não aparece na descrição da construção (provavelmente estaria nas linhas que foram perdidas deste palimpsesto).

Tracemos agora uma reta qualquer $\kappa\lambda$ paralela a $\varepsilon\zeta$. Esta reta encontra a superfície do segmento esférico em $\kappa$ e $\lambda$, encontra as geratrizes do cone $\alpha\varepsilon\zeta$ em $\rho$ e $o$, assim como encontra a reta $\alpha\gamma$ em $\pi$.

A partir da geometria da Figura 10.42 Arquimedes demonstra a seguinte relação matemática:[52]

$$\frac{\alpha\gamma}{\alpha\pi} = \frac{Q(\kappa\pi) + Q(o\pi)}{Q(o\pi)} = \frac{\kappa\pi \cdot \kappa\pi + o\pi \cdot o\pi}{o\pi \cdot o\pi} \; . \tag{10.100}$$

Mas já sabemos que uma proporção entre os quadrados de dois segmentos é a mesma proporção existente entre os círculos que têm como raio (ou diâmetro) estes mesmos segmentos (ver o Teorema 2 de *A Medida do Círculo*).[53] Portanto, podemos escrever o lado direito da Equação (10.100) como sendo:

$$\frac{Q(\kappa\pi) + Q(o\pi)}{Q(o\pi)} = \frac{(\textit{Círculo de diâmetro } \kappa\lambda) + (\textit{Círculo de diâmetro } o\rho)}{\textit{Círculo de diâmetro } o\rho} \; . \tag{10.101}$$

Com isto temos a relação matemática básica necessária para a demonstração física deste teorema, apresentada a seguir.

Por construção temos que:

$$\alpha\gamma = \alpha\theta \; . \tag{10.102}$$

Então das Equações (10.100) até (10.102) temos que:

$$\frac{\alpha\theta}{\alpha\pi} = \frac{(\textit{Círculo de diâmetro } \kappa\lambda) + (\textit{Círculo de diâmetro } o\rho)}{\textit{Círculo de diâmetro } o\rho} \; . \tag{10.103}$$

Supondo círculos de pesos distribuídos uniformemente, esta é a lei da alavanca considerando o ponto $\alpha$ como fulcro. Ou seja, esta alavanca permanece

[52] A dedução desta fórmula encontra-se na Seção A.7 do Apêndice A.

[53] [Mug70, pág. 139].

em equilíbrio com o círculo de diâmetro $o\rho$ colocado no ponto $\theta$, com seu centro de gravidade atuando em $\theta$, juntamente com a soma dos círculos de diâmetro $o\rho$ e $\kappa\lambda$ permanecendo nos seus lugares, ou seja, com seus centros de gravidade atuando em $\pi$, como ilustrado na Figura 10.43.

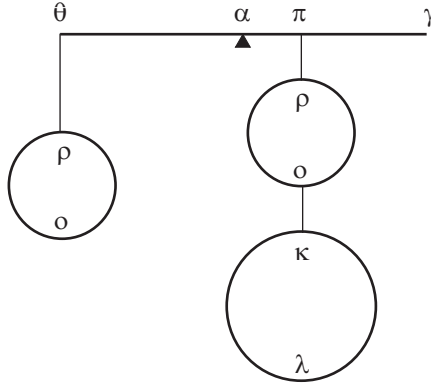



Figura 10.43: Alavanca em equilíbrio ao redor do ponto $\alpha$ com o círculo de raio $o\rho$ atuando em $\theta$, juntamente com os círculos de raios $o\rho$ e $\kappa\lambda$ atuando em $\pi$.

Portanto, o círculo do segmento esférico $\alpha\beta\delta$ mais aquele do cone $\alpha\varepsilon\zeta$, equilibram em relação ao ponto $\alpha$ o círculo do cone $\alpha\varepsilon\zeta$. Da mesma maneira, todos os círculos que podem ser obtidos no segmento esférico $\alpha\beta\delta$ e todos os que podem ser obtidos no cone $\alpha\varepsilon\zeta$, permanecendo nos seus lugares, equilibrarão em relação ao ponto $\alpha$, todos os círculos do cone $\alpha\varepsilon\zeta$, transportados e colocados em $\theta$, de modo que seus centros de gravidade atuem no ponto $\theta$.

Assim também o segmento esférico $\alpha\beta\delta$ e o cone $\alpha\varepsilon\zeta$, permanecendo nos seus lugares, equilibrarão o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ deslocado para o ponto $\theta$ da alavanca de modo que seu centro de gravidade atue sobre o ponto $\theta$, como ilustrado na Figura 10.44.

Dividimos $\alpha\eta$ pelo ponto $\phi$ de modo que:

$$\alpha\eta = 4\eta\phi \ . \tag{10.104}$$

Pelo Lema 10 de *O Método*, citado na Seção 10.7 na página 108 deste trabalho, vem então que $\phi$ é o centro de gravidade do cone $\alpha\varepsilon\zeta$. Pelo sexto postulado da obra *Sobre o Equilíbrio dos Planos*[54] vem que se a alavanca da Figura 10.44 estava em equilíbrio, então também vai continuar em equilíbrio quando o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ que estava apoiado sobre o braço direito da alavanca passa a atuar apenas sobre seu centro de gravidade no ponto $\phi$, ou seja, como indicado na Figura 10.45.

[54] Citado na Subseção 7.1.3, página 47 deste trabalho.

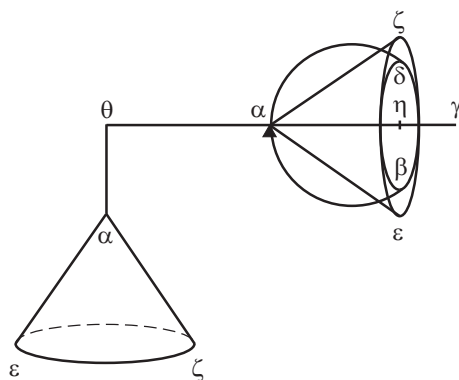



Figura 10.44: Alavanca em equilíbrio ao redor do ponto $\alpha$, com o cone à esquerda atuando em $\theta$, juntamente com o cone e o segmento esférico à direita apoiados sobre o braço da alavanca.

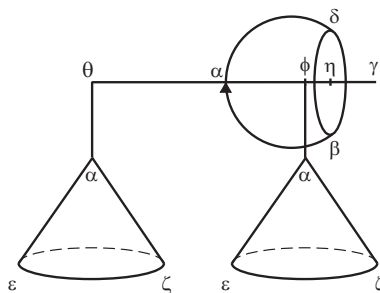



Figura 10.45: Alavanca em equilíbrio ao redor do ponto $\alpha$, com o cone à esquerda atuando em $\theta$, juntamente com o segmento esférico à direita apoiado sobre o braço da alavanca e com o cone à direita atuando apenas sobre $\phi$.

Consideramos agora um cilindro[55] $\mu\nu$ de mesmo peso que o cone $\alpha\varepsilon\zeta$, como mostrado na Figura 10.46.

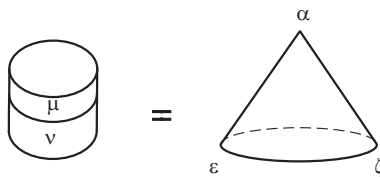



Figura 10.46: Cilindro $\mu\nu$ com mesmo peso que o cone $\alpha\varepsilon\zeta$.

Arquimedes supõe este cilindro $\mu\nu$ cortado por um plano perpendicular ao seu eixo em dois cilindros, $\mu$ e $\nu$. O cilindro $\mu\nu$ é cortado de tal forma que

[55]Ver a discussão sobre o posicionamento dos cilindros na Seção D.2 do Apêndice D.

somente o cilindro $\mu$ colocado em $\theta$ equilibre o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ atuando sobre $\phi$, como ilustrado na Figura 10.47.

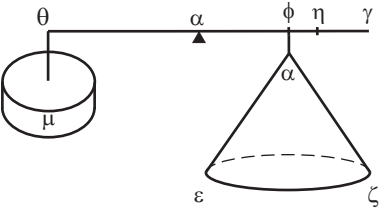



Figura 10.47: Por hipótese sabemos que o cilindro $\mu$ atuando em $\theta$ equilibra a alavanca ao redor do ponto $\alpha$ quando o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ está atuando em $\phi$.

Por hipótese o cilindro $\mu\nu$ possui mesmo peso que o cone $\alpha\varepsilon\zeta$. Logo, o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ colocado à esquerda na Figura 10.45 que estava atuando em $\theta$ pode ser substituído por este cilindro $\mu\nu$, sem afetar o equilíbrio da alavanca, como ilustrado na Figura 10.48.

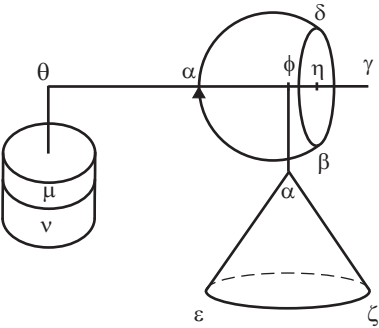



Figura 10.48: Cilindro $\mu\nu$ equilibrando o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ e o segmento esférico.

Por hipótese Arquimedes considerou que a parte $\mu$ deste cilindro atuando em $\theta$ equilibrava o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ atuando em $\phi$, como indicado na Figura 10.47. Logo podemos tirar da Figura 10.48, sem afetar o equilíbrio da alavanca, o cilindro $\mu$ atuando em $\theta$ juntamente com o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ atuando em $\phi$. Ficamos assim com a situação da Figura 10.49, onde vemos o cilindro $\nu$ atuando em $\theta$ e equilibrando a alavanca em relação ao ponto $\alpha$ com o segmento esférico distribuído sobre o braço da alavanca.

Vamos supor que $\chi$ seja o centro de gravidade do segmento esférico. Portanto, aplicando agora o Postulado 6 da obra *Sobre o Equilíbrio dos Planos*,[56] temos que se a situação da Figura 10.49 era de equilíbrio, vai continuar equilibrada quando o segmento esférico atua apenas sobre $\chi$, como indicado na Figura 10.50.

[56] Citado na Subseção 7.1.3, página 47 deste trabalho, ver ainda [Arq08, págs. 215 a 220 e 226].

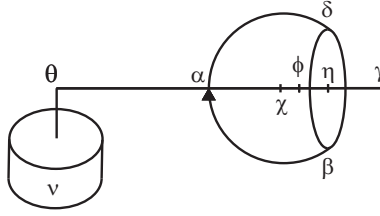



Figura 10.49: Cilindro $\nu$ equilibrando o segmento esférico distribuído sobre o braço da alavanca.

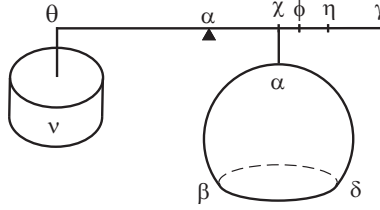



Figura 10.50: Cilindro $\nu$ equilibrando o segmento esférico atuando sobre seu centro de gravidade.

Mas já foi demonstrado pelo Teorema VII que (ver a Figura 10.42):

$$\frac{Segmento\ esf\acute{e}rico\ \alpha\beta\delta}{Cone\ \alpha\beta\delta} = \frac{Raio\ da\ esfera + \gamma\eta}{\gamma\eta} = \frac{\eta\xi}{\gamma\eta} \ . \tag{10.105}$$

Sabendo que[57] os volumes de cones com a mesma altura são proporcionais às respectivas bases, e sendo as áreas dos círculos proporcionais aos quadrados de seus diâmetros (ou de seus raios), podemos escrever:

$$\frac{Cone\ \alpha\beta\delta}{Cone\ \alpha\varepsilon\zeta} = \frac{C\acute{\imath}rculo\ de\ di\hat{a}metro\ \beta\delta}{C\acute{\imath}rculo\ de\ di\hat{a}metro\ \varepsilon\zeta} = \frac{Q(\beta\eta)}{Q(\varepsilon\eta)} = \frac{\beta\eta\cdot\beta\eta}{\varepsilon\eta\cdot\varepsilon\eta} \ . \tag{10.106}$$

Mas também temos, pela propriedade do triângulo retângulo:[58]

$$Q(\beta\eta) = R(\gamma\eta,\ \alpha\eta) \ . \tag{10.107}$$

Ou seja:

$$\beta\eta\cdot\beta\eta = \gamma\eta\cdot\alpha\eta \ . \tag{10.108}$$

Por construção temos ainda que:

[57] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XII, Proposição 11, citada na Seção 10.4, página 94 deste trabalho, ver ainda [Euc56a, Vol. 3, pág. 406] e [Euc09, pág. 546].

[58] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 8, Corolário, citado na Subseção 9.3.1, página 67 deste trabalho, ver ainda [Euc56a, Vol. 2, pág. 211] e [Euc09, pág. 241].

$$Q(\varepsilon\eta) = Q(\alpha\eta) \ , \tag{10.109}$$

isto é:

$$\varepsilon\eta \cdot \varepsilon\eta = \alpha\eta \cdot \alpha\eta \ . \tag{10.110}$$

Portanto:

$$\frac{Cone\ \alpha\beta\delta}{Cone\ \alpha\varepsilon\zeta} = \frac{\gamma\eta}{\alpha\eta} \ . \tag{10.111}$$

Multiplicando membro a membro as Equações (10.105) e (10.111), obtemos:

$$\frac{Segmento\ esf\acute{e}rico\ \alpha\beta\delta}{Cone\ \alpha\varepsilon\zeta} = \frac{\eta\xi}{\alpha\eta} \ . \tag{10.112}$$

Porém, pela definição do ponto $\chi$ dada pela Equação (10.96), temos que:

$$\frac{\alpha\chi}{\eta\chi} = \frac{\alpha\eta + 4\gamma\eta}{\alpha\eta + 2\gamma\eta} \ . \tag{10.113}$$

Invertendo vem que:

$$\frac{\eta\chi}{\alpha\chi} = \frac{\alpha\eta + 2\gamma\eta}{\alpha\eta + 4\gamma\eta} \ . \tag{10.114}$$

Pela propriedade *componendo* das proporções obtemos que:[59]

$$\frac{\eta\chi + \alpha\chi}{\alpha\chi} = \frac{(\alpha\eta + 2\gamma\eta) + (\alpha\eta + 4\gamma\eta)}{\alpha\eta + 4\gamma\eta} \ . \tag{10.115}$$

Ou então:

$$\frac{\alpha\eta}{\alpha\chi} = \frac{6\gamma\eta + 2\alpha\eta}{\alpha\eta + 4\gamma\eta} \ . \tag{10.116}$$

Por construção temos que:

$$\eta\xi = \gamma\eta + (raio\ da\ esfera) \ , \tag{10.117}$$

Ou seja:

$$\eta\xi = \frac{4\gamma\eta + 4\frac{\alpha\gamma}{2}}{4} \ . \tag{10.118}$$

Mas:

$$\alpha\gamma = \alpha\eta + \gamma\eta \ . \tag{10.119}$$

De onde:

[59] Ver a Equação (8.22) na teoria das proporções.

$$\eta\xi = \frac{4\gamma\eta + 2\gamma\eta + 2\alpha\eta}{4} = \frac{6\gamma\eta + 2\alpha\eta}{4} \ . \tag{10.120}$$

Da mesma maneira, pela definição do ponto $\phi$ temos que:

$$\alpha\eta = 4\eta\phi \ . \tag{10.121}$$

Pela Figura 10.42 verificamos que:

$$\gamma\phi = \alpha\gamma - \alpha\phi \ , \tag{10.122}$$

assim como:

$$\alpha\phi = \alpha\eta - \eta\phi \ . \tag{10.123}$$

E sendo:

$$\alpha\gamma = \alpha\eta + \gamma\eta \ , \tag{10.124}$$

temos que:

$$\gamma\phi = (\alpha\eta + \gamma\eta) - \alpha\eta + \eta\phi = \gamma\eta + \eta\phi = \gamma\eta + \frac{\alpha\eta}{4} \ . \tag{10.125}$$

Logo:

$$\gamma\phi = \frac{4\gamma\eta + \alpha\eta}{4} \ . \tag{10.126}$$

Substituindo as Equações (10.120) e (10.126) na Equação (10.116), vem:

$$\frac{\alpha\eta}{\alpha\chi} = \frac{\eta\xi}{\gamma\phi} \ . \tag{10.127}$$

Pelas propriedades das proporções temos ainda que:

$$\frac{\eta\xi}{\alpha\eta} = \frac{\gamma\phi}{\alpha\chi} \ . \tag{10.128}$$

Mas já foi demonstrado na Equação (10.112) que:

$$\frac{Segmento\ esf\acute{e}rico\ \alpha\beta\delta}{Cone\ \alpha\varepsilon\zeta} = \frac{\eta\xi}{\alpha\eta} \ . \tag{10.129}$$

Portanto, substituindo na Equação (10.129) a Equação (10.128), chegamos a:

$$\frac{Segmento\ esf\acute{e}rico\ \alpha\beta\delta}{Cone\ \alpha\varepsilon\zeta} = \frac{\gamma\phi}{\alpha\chi} \ . \tag{10.130}$$

Já vimos que o cilindro $\mu$ equilibra o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ em relação ao ponto $\alpha$. Além disso, o centro de gravidade do cilindro é $\theta$ e aquele do cone é $\phi$. Concluímos então pela lei da alavanca que:

$$\frac{Cone\ \alpha\varepsilon\zeta}{Cilindro\ \mu} = \frac{\alpha\theta}{\alpha\phi} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha\phi} \ . \tag{10.131}$$

Com isto podemos concluir a demonstração. Sendo o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ igual à soma dos cilindros $\mu$ e $\nu$ por construção, podemos escrever:

$$Cone\ \alpha\varepsilon\zeta = (Cilindro\ \mu) + (Cilindro\ \nu) \ . \tag{10.132}$$

Pela Equação (10.131) vem que:

$$\frac{(Cilindro\ \mu) + (Cilindro\ \nu)}{Cilindro\ \mu} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha\phi} \ . \tag{10.133}$$

Aplicando a propriedade das Proporções vista no Capítulo 8, Equação 8.24, à Equação (10.133), temos então:

$$\frac{(Cilindro\ \mu) + (Cilindro\ \nu)}{(Cilindro\ \mu) + (Cilindro\ \nu) - (Cilindro\ \mu)} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha\gamma - \alpha\phi} \ . \tag{10.134}$$

Ou seja:

$$\frac{(Cilindro\ \mu) + (Cilindro\ \nu)}{Cilindro\ \nu} = \frac{\alpha\gamma}{\gamma\phi} \ . \tag{10.135}$$

Combinando esta equação com a Equação (10.132) vem:

$$\frac{Cone\ \alpha\varepsilon\zeta}{Cilindro\ \nu} = \frac{\alpha\gamma}{\gamma\phi} = \frac{\alpha\theta}{\gamma\phi} \ . \tag{10.136}$$

Multiplicando membro a membro as Equações (10.130) e (10.136) obtemos finalmente:

$$\frac{Segmento\ esf\acute{e}rico\ \alpha\beta\delta}{Cilindro\ \nu} = \frac{\alpha\theta}{\alpha\chi} \ . \tag{10.137}$$

Mas esta é a lei da alavanca para o segmento $\alpha\beta\delta$ e o cilindro $\nu$ em equilíbrio em relação ao ponto $\alpha$, com seus centros de gravidade atuando nos pontos $\chi$ e $\theta$, respectivamente. Assim, concluímos que o centro de gravidade do segmento $\alpha\beta\delta$ é o ponto $\chi$. Este centro de gravidade está caracterizado pela relação matemática dada pela Equação (10.96).

### 10.10.1 Importância do Teorema IX

- Novamente vemos Arquimedes utilizando seu método para calcular o centro de gravidade de um corpo.

- Sabíamos que Arquimedes havia calculado o centro de gravidade não apenas de um hemisfério, mas de qualquer segmento esférico, já que utilizou estes resultados para estudar o equilíbrio de um corpo com este formato

flutuando em um líquido em seu trabalho *Sobre os Corpos Flutuantes*.[60] Somente não sabíamos como ele tinha chegado a este resultado. A descoberta de *O Método* nos permitiu ver como ele chegou nesse valor.

## 10.11 Teoremas X e XI

Os teoremas X e XI do *Método* referentes ao centro de gravidade de um segmento de elipsoide de revolução e de um segmento de hiperboloide de revolução não foram demonstrados por Arquimedes por considerar que as demonstrações seriam equivalentes às anteriores. Pelo mesmo motivo não apresentaremos as demonstrações físicas desses teoremas.

## 10.12 Demonstração Física do Teorema XII: Volume da Unha Cilíndrica

Enunciado do Teorema:

> Se for inscrito em um prisma reto de bases quadradas, um cilindro com as bases nos quadrados opostos e sua superfície tangente aos quatro paralelogramos restantes, e se for traçado um plano pelo centro de um dos círculos de base do cilindro e por um dos lados do quadrado oposto, a figura cortada pelo plano traçado, é a sexta parte de todo o prisma.

O sólido descrito por Arquimedes é conhecido como *unha cilíndrica*. A sua forma pode ser visualizada com o auxílio da Figura 10.51. Em (a) temos o prisma e o cilindro a partir dos quais a unha cilíndrica é obtida, estando ela representada na letra (b).

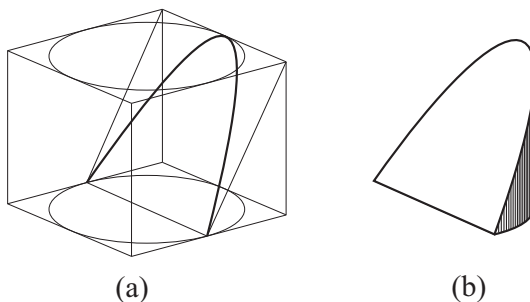



Figura 10.51: (a) Vista do prisma de bases quadradas com o cilindro inscrito, juntamente com o plano que define a unha cilíndrica. (b) Vista em perspectiva da unha cilíndrica.

Os sólidos estudados neste teorema são bem mais complexos que nos casos anteriores. Para chegar a uma equação da alavanca que permita resolver o

[60] Tradução para o português em [Ass96] e [Arq12].

problema, Arquimedes divide o problema em duas partes, sendo a primeira parte o Teorema XII e a segunda parte o Teorema XIII.

A primeira figura do teorema é obtida fazendo um corte dos sólidos por um plano passando pelo eixo e perpendicular às bases. A Figura 10.52 assim obtida representa o corte dos sólidos visto de perfil.

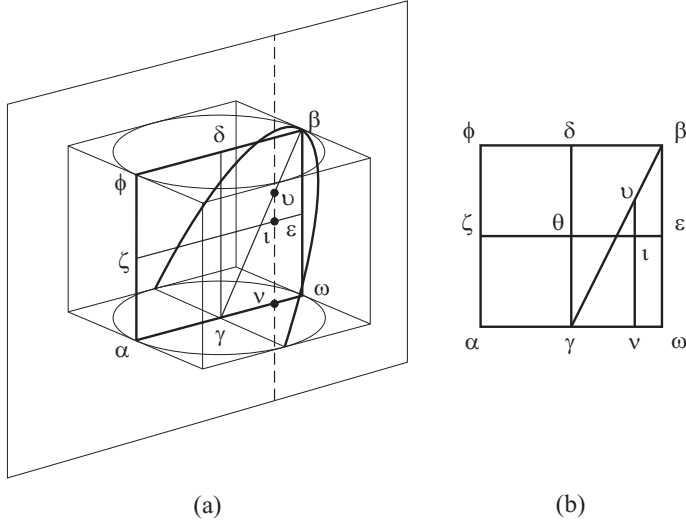



Figura 10.52: (a) Vista dos sólidos cortados por um plano passando pelo eixo e perpendicular às bases. (b) Primeira Figura do Teorema XII (paralelogramo de corte).

Na Figura 10.52, $\gamma\delta$ representa o eixo comum do prisma e do cilindro, enquanto que $\beta\gamma$ é o eixo de simetria (diâmetro) da parábola obtida pelo corte do plano inclinado sobre o cilindro. O paralelogramo $\alpha\phi\beta\omega$ é a figura resultante do corte do prisma e do cilindro pelo plano passando pelo eixo. Seja traçada a reta $\varepsilon\zeta$ perpendicular a $\gamma\delta$, dividindo-a pela metade. Por $\varepsilon\zeta$ passa-se um plano perpendicular às bases do cilindro.

A segunda figura usada por Arquimedes corresponde a um corte dos sólidos por um plano paralelo às bases e passando pelo ponto médio do eixo, ou seja, pelo ponto $\theta$. Portanto, a figura obtida nestas condições mostra uma visão de cima. Na Figura 10.53 o paralelogramo $\rho\nu o\mu\xi$ representa o corte do prisma por um plano paralelo à base e passando pelo ponto médio do eixo. O círculo inscrito representa o corte do cilindro pelo mesmo plano.

Nesta Figura 10.53 a reta $\kappa\lambda$ é a interseção do plano inclinado que gerou a unha com o mesmo plano horizontal. A reta $\sigma\tau$ é uma reta qualquer, paralela a $\kappa\lambda$, traçada no semicírculo $o\pi\rho$. Sobre a reta $\sigma\tau$ levantamos um plano perpendicular às bases. Este plano cortará no semicilindro, um paralelogramo que tem um lado igual a $\sigma\tau$ e o outro lado igual à altura do cilindro. A interseção deste mesmo plano com a unha cilíndrica será também um paralelogramo com um lado igual a $\sigma\tau$ e o outro lado igual à reta $\nu\upsilon$ da Figura 10.52.

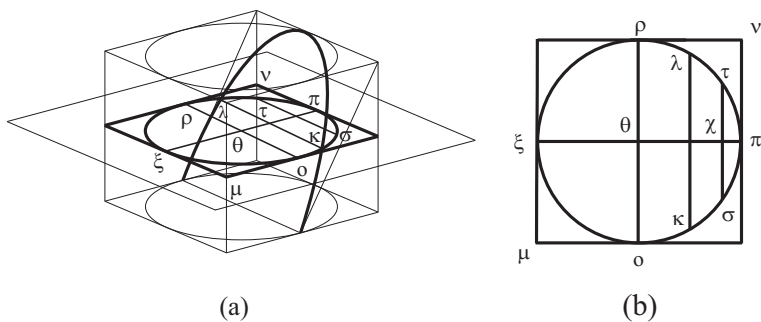



Figura 10.53: (a) Vista dos sólidos cortados por um plano paralelo às bases. (b) Segunda Figura do Teorema XII (quadrado com círculo inscrito).

Os paralelogramos obtidos pela interseção deste plano passando por $\sigma\tau$ com o semicilindro e com a unha cilíndrica, bem como a posição da reta $\nu\upsilon$, estão mostrados na Figura 10.54.

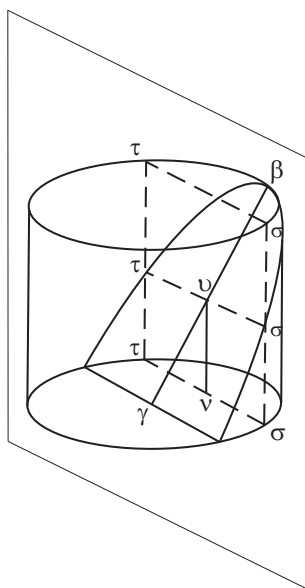



Figura 10.54: Vista em perspectiva dos paralelogramos obtidos pelo corte dos sólidos pelo plano passando por $\sigma\tau$.

A partir da geometria das Figuras 10.52 (b) e 10.53 (b), Arquimedes deduz a seguinte proporção:

$$\frac{\theta\xi}{\theta\chi} = \frac{\textit{Paralelogramo no semicilindro}}{\textit{Paralelogramo na unha cilíndrica}} \ . \tag{10.138}$$

Atribuindo peso distribuído uniformemente nos paralelogramos, a Equação (10.138) pode ser considerada como representando uma alavanca em equilíbrio em relação ao ponto $\theta$, tendo de um lado o paralelogramo do semicilindro (paralelogramo maior na Figura 10.54) permanecendo no seu lugar, e do outro lado o paralelogramo da unha cilíndrica (paralelogramo menor na Figura 10.54) transportado para o ponto $\xi$ e com o seu centro de gravidade atuando em $\xi$. Esta alavanca em equilíbrio está indicada na Figura 10.55.

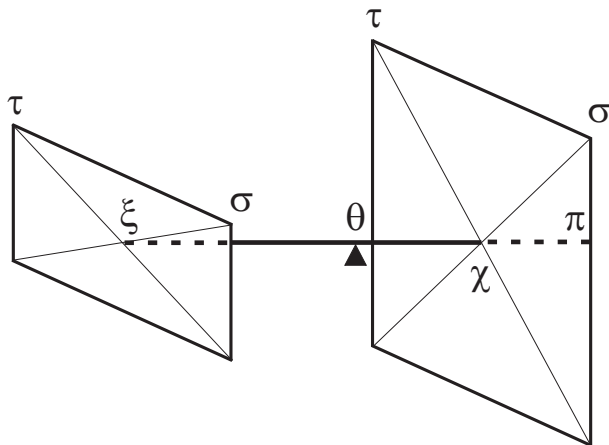



Figura 10.55: Alavanca $\xi\pi$ em equilíbrio ao redor do fulcro em $\theta$. O paralelogramo maior é obtido do semicilindro, enquanto que o menor é obtido da unha cilíndrica. Estes paralelogramos são ortogonais ao eixo da alavanca, com seus centros atuando em $\chi$ e $\xi$, respectivamente.

O Lema 6 de *O Método* afirma que:

> O centro de gravidade de todo paralelogramo é o ponto de encontro das diagonais.

Por este Lema vem que o paralelogramo do semicilindro tem como centro de gravidade o ponto $\chi$. Portanto, este centro de gravidade corresponde ao ponto médio da reta $\sigma\tau$ na Figura 10.53 (b). Então podemos concluir que a alavanca fica em equilíbrio em relação ao ponto $\theta$ com o paralelogramo maior cujo centro de gravidade foi colocado em $\chi$, juntamente com o paralelogramo menor cujo centro de gravidade foi colocado em $\xi$.

Da mesma maneira, qualquer outra reta paralela a $\kappa\lambda$ na Figura 10.53 (b) dentro do semicírculo, juntamente com o plano levantado sobre ela, darão origem a outros paralelogramos que também estarão em equilíbrio sobre a alavanca em relação ao ponto $\theta$.

Então todos os paralelogramos do semicilindro, permanecendo nos seus lugares, estarão em equilíbrio com todos os paralelogramos da unha cilíndrica transportados sobre a alavanca e colocados no ponto $\xi$.

Por consequência, o semicilindro, permanecendo no seu lugar, estará em equilíbrio em relação ao ponto $\theta$ com a unha cilíndrica transportada e colocada no travessão da alavanca em $\xi$, de modo que o seu centro de gravidade seja o ponto $\xi$. Esta condição de equilíbrio está mostrada em perspectiva na Figura 10.56 (a).

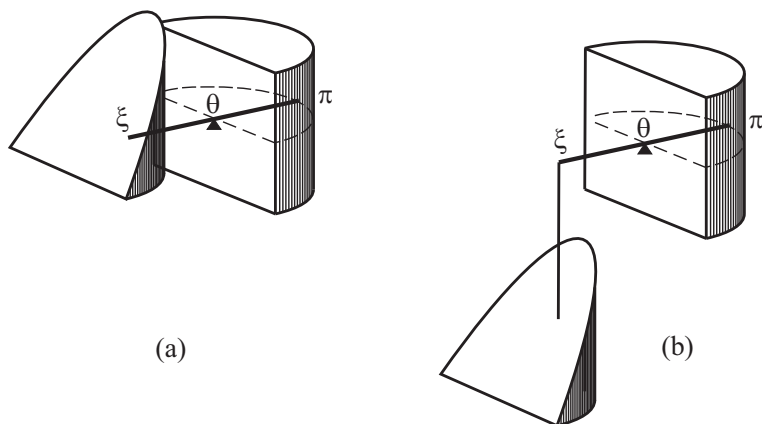



Figura 10.56: (a) Visão em perspectiva da alavanca em equilíbrio ao redor do ponto $\theta$. O semicilindro está distribuído sobre um dos braços da alavanca, enquanto que a unha cilíndrica está atuando apenas sobre a extremidade $\xi$. (b) A mesma situação mas agora com a unha cilíndrica apoiada por um fio de peso desprezível, com seu centro de gravidade verticalmente abaixo de $\xi$.

Na Figura 10.56 (b) mostramos a mesma situação mas com a unha cilíndrica apoiada em $\xi$ por um fio de peso desprezível, com seu centro de gravidade verticalmente abaixo de $\xi$.

Neste ponto Arquimedes interrompe a dedução do volume da unha cilíndrica pois precisa de informações adicionais que serão obtidas no Teorema XIII.

## 10.13 Demonstração Física do Teorema XIII: Volume da Unha Cilíndrica — Continuação

Este teorema tem como objetivo obter uma outra alavanca em equilíbrio, que Arquimedes vai comparar com a alavanca do Teorema XII, Figura 10.56. O objetivo é chegar na determinação do volume da unha cilíndrica.

O Teorema XII terminou provando que a unha cilíndrica apoiada apenas sobre $\xi$ fica em equilíbrio, sobre a alavanca $\xi\pi$ com fulcro em $\theta$, com o semicilindro $o\pi\rho$ e altura $\gamma\delta$ (Figura 10.52) permanecendo no seu lugar distribuído sobre o braço da alavanca. Este equilíbrio está representado na Figura 10.56.

Para a demonstração do Teorema XIII, Arquimedes usa o mesmo artifício

do teorema anterior, que consiste em cortar os sólidos com um plano paralelo às bases, pelo ponto médio da altura, Figura 10.57 (a). Além disso, trabalha sobre a imagem plana obtida por este corte, Figura 10.57 (b).

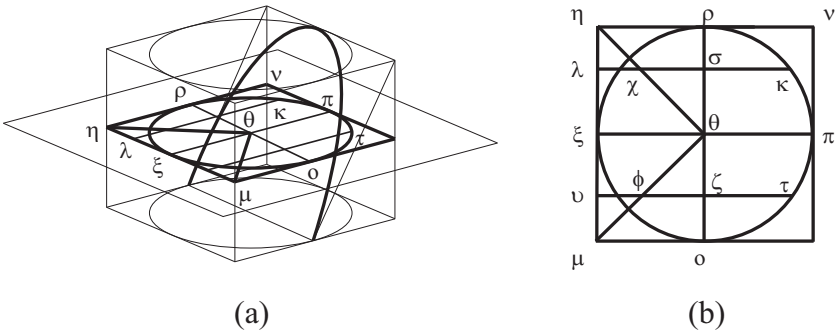



Figura 10.57: (a) Vista dos sólidos com o plano de corte paralelo às bases e passando pelo ponto médio da altura. (b) Vista superior das interseções.

Nesta Figura, o quadrado $\mu\nu$ representa a interseção do plano de corte com o prisma total, o círculo $\xi o\pi\rho$ representa a interseção do plano de corte com o cilindro inscrito, enquanto o semicírculo $o\pi\rho$ é a interseção do plano de corte com o mesmo semicilindro obtido no Teorema XII.

A demonstração do teorema continua traçando as retas $\eta\theta$ e $\theta\mu$. Sobre elas levantam-se os planos perpendiculares à base. Arquimedes obtém desta maneira um prisma reto de base triangular (igual ao triângulo $\eta\theta\mu$) que é um quarto do prisma total de base quadrada.

Para chegar a esta relação de $1/4$ entre os volumes dos prismas, podemos citar aqui a Proposição 32 do Livro XI de *Os Elementos* de Euclides:[61]

> Os sólidos paralelepípedos que estão sob a mesma altura estão entre si como as bases.

Arquimedes traça agora no quadrado $\mu\nu$ e no semicírculo $o\pi\rho$ duas retas paralelas, $\kappa\lambda$ e $\tau\upsilon$, equidistantes de $\xi\pi$. Estas retas cortam a circunferência do semicírculo nos pontos $\kappa$ e $\tau$, assim como cortam o diâmetro $o\rho$ nos pontos $\sigma$ e $\zeta$. Elas cortam também as retas $\eta\theta$ e $\theta\mu$ nos pontos $\chi$ e $\phi$, respectivamente, como indicado na Figura 10.58 (a).

Sobre as retas $\kappa\lambda$ e $\tau\upsilon$ são levantados dois planos perpendiculares ao diâmetro $o\rho$. Um destes planos cortará o semicilindro segundo um paralelogramo que tem um lado igual a $\kappa\sigma$ e o outro lado igual à altura do cilindro. Cortará também o prisma $\eta\theta\mu$ segundo um paralelogramo que tem um lado igual a $\lambda\chi$ e o outro lado também igual à altura do prisma.

Pelo mesmo motivo teremos no semicilindro um outro paralelogramo de lado $\tau\zeta$ com a mesma altura do semicilindro, enquanto que no prisma haverá um

[61][Euc09, pág. 513].

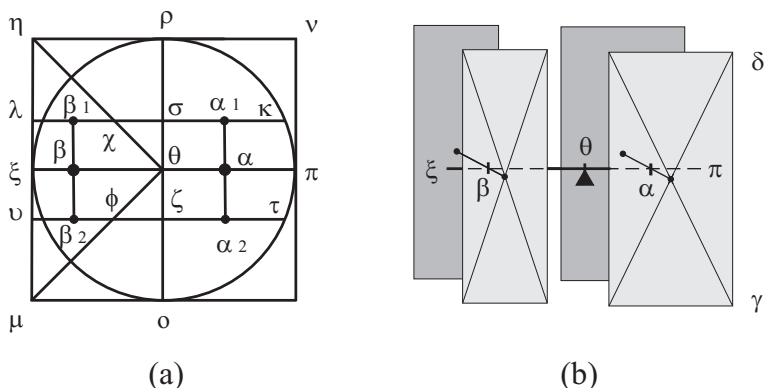



Figura 10.58: (a) Figura considerada por Arquimedes. (b) Visão em perspectiva dos dois paralelogramos do semicilindro passando por $o\pi\rho$ e dos dois paralelogramos do prisma passando por $\eta\theta\mu$.

outro paralelogramo cujo lado será $\upsilon\phi$ e que terá a mesma altura do prisma.[62]

Na Figura 10.58 (b) temos uma visão em perspectiva destes quatro paralelogramos.

O Lema 3 de *O Método* afirma que:

> Se os centros de gravidade de um número tão grande quanto se queira de grandezas estiverem situados sobre a mesma reta, [então] o centro de gravidade da grandeza composta por todas essas grandezas, também estará sobre a mesma reta.

Já a quarta Proposição da obra *Sobre o Equilíbrio dos Planos* afirma que:[63]

> Se duas grandezas iguais não possuem o mesmo centro de gravidade, o centro de gravidade da grandeza composta por estas [duas] grandezas estará no ponto médio do segmento de reta ligando os centros de gravidade das [duas] grandezas.

Seja $\beta_1$ na Figura 10.58 (a) o ponto médio de $\lambda\chi$, $\beta_2$ o ponto médio de $\upsilon\phi$, enquanto que $\beta$ é o ponto médio entre $\beta_1$ e $\beta_2$. Da mesma forma, seja $\alpha_1$ na Figura 10.58 (a) o ponto médio de $\kappa\sigma$, $\alpha_2$ o ponto médio de $\zeta\tau$, enquanto que $\alpha$ é o ponto médio entre $\alpha_1$ e $\alpha_2$. Pelo Lema 3 de *O Método*, juntamente com a Proposição 4 da obra *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, sabemos que o centro de gravidade da grandeza composta pelos dois paralelogramos do semicilindro passando por $o\pi\rho$ está localizado no ponto $\alpha$ da reta $\xi\pi$. Da mesma maneira, o centro de gravidade da grandeza composta pelos dois paralelogramos do prisma passando por $\eta\theta\mu$ está no ponto $\beta$ da mesma reta.

No Apêndice C mostramos que (ver a Figura 10.58):

[62] Lembramos que a altura comum do cilindro, do semicilindro e do prisma é a reta $\gamma\delta$, mostrada na Figura 10.52.

[63] Ver [Arq08, pág. 224].

$$\kappa\sigma \cdot \kappa\sigma = \rho\sigma \cdot o\sigma \ . \tag{10.139}$$

Utilizando esta equação e analisando a Figura 10.58 podemos obter as seguintes relações:

$$\frac{R(\kappa\sigma,\ \gamma\delta) + R(\zeta\tau,\ \gamma\delta)}{R(\lambda\chi,\ \gamma\delta) + R(\upsilon\phi,\ \gamma\delta)} = \frac{\kappa\sigma \cdot \gamma\delta + \zeta\tau \cdot \gamma\delta}{\lambda\chi \cdot \gamma\delta + \upsilon\phi \cdot \gamma\delta}$$

$$= \frac{\kappa\sigma}{\lambda\chi} = \frac{\kappa\sigma}{\rho\sigma} = \frac{\kappa\sigma \cdot \kappa\sigma}{\rho\sigma \cdot \kappa\sigma} = \frac{\rho\sigma \cdot o\sigma}{\rho\sigma \cdot \kappa\sigma} = \frac{o\sigma}{\kappa\sigma} \ , \tag{10.140}$$

e

$$\frac{o\sigma}{\kappa\sigma} = \frac{\rho\sigma + 2\theta\sigma}{\kappa\sigma} = \frac{\lambda\chi + 2\sigma\chi}{\kappa\sigma} = \frac{\frac{\lambda\chi}{2} + \sigma\chi}{\frac{\kappa\sigma}{2}} = \frac{\beta\theta}{\alpha\theta} \ . \tag{10.141}$$

Destas duas equações vem então:

$$\frac{R(\kappa\sigma,\ \gamma\delta) + R(\zeta\tau,\ \gamma\delta)}{R(\lambda\chi,\ \gamma\delta) + R(\upsilon\phi,\ \gamma\delta)} = \frac{\kappa\sigma \cdot \gamma\delta + \zeta\tau \cdot \gamma\delta}{\lambda\chi \cdot \gamma\delta + \upsilon\phi \cdot \gamma\delta} = \frac{\beta\theta}{\alpha\theta} \ . \tag{10.142}$$

Esta é a relação matemática mais importante. Sendo as áreas dos retângulos proporcionais a seus pesos, ela indica que a alavanca $\xi\pi$ vai ficar em equilíbrio ao redor do fulcro $\theta$ se os dois retângulos do semicilindro estiverem apoiados sobre $\alpha$, juntamente com os dois retângulos do prisma apoiados sobre $\beta$, como indicado na Figura 10.58 (b).

Este equilíbrio também vai ocorrer para qualquer conjunto de quatro retângulos obtidos por todo par de retas $\kappa\lambda$ e $\tau\upsilon$ indo desde $\theta\sigma = \theta\zeta = 0$ até $\theta\sigma = \theta\zeta = \theta\rho$. Ao considerar todas elas em conjunto, obtemos um equilíbrio da alavanca ao redor de $\theta$ com o semicilindro distribuído ao longo do braço $\theta\pi$, juntamente com o prisma distribuído ao longo do braço $\theta\xi$, Figura 10.59.

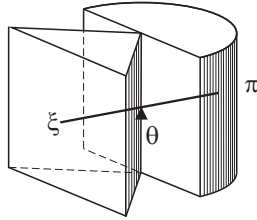



Figura 10.59: O prisma e o semicilindro em equilíbrio apoiados sobre os braços da alavanca.

Comparamos agora na Figura 10.60 o equilíbrio obtido no Teorema XII com aquele do Teorema XIII.

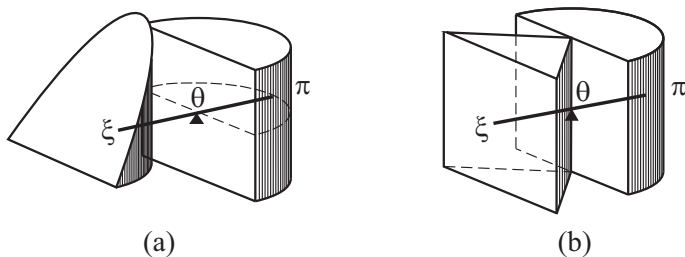



Figura 10.60: (a) Alavanca em equilíbrio do Teorema XII com a unha atuando apenas sobre a extremidade $\xi$ da alavanca, enquanto que o semicilindro está distribuído sobre seu braço. (b) Alavanca em equilíbrio do Teorema XIII, com o prisma e o semicilindro distribuídos sobre os braços da alavanca.

No primeiro caso temos o semicilindro equilibrando a unha cilíndrica atuando apenas sobre a extremidade $\xi$, enquanto que no segundo caso temos o semicilindro equilibrando o prisma distribuído sobre o braço da alavanca. Logo, podemos concluir que o prisma triangular, permanecendo no seu lugar, fica em equilíbrio com a unha cilíndrica colocada em uma das extremidades da alavanca, Figura 10.61.

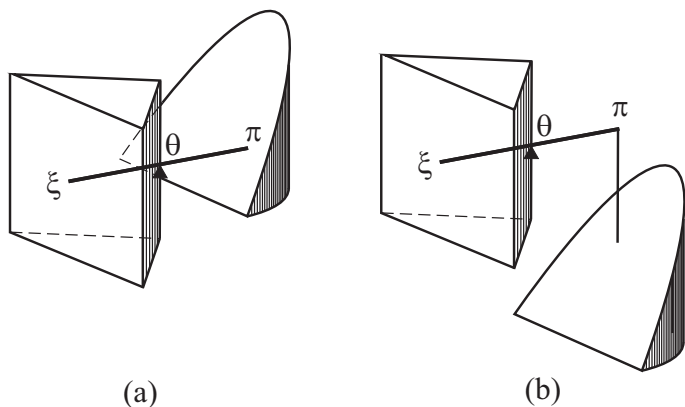



Figura 10.61: (a) Alavanca em equilíbrio ao redor de $\theta$ com a unha cilíndrica atuando apenas na extremidade $\pi$ enquanto que o prisma está distribuído sobre o braço. (b) Mesma situação com a unha dependurada por um fio passando por $\pi$, enquanto seu centro de gravidade está verticalmente abaixo de $\pi$.

O Lema 9 de *O Método* afirma que:

> O centro de gravidade de todo prisma é o [ponto] que divide o eixo em duas partes iguais.

O "eixo" a que Arquimedes se refere aqui é o segmento de reta unindo os centros de gravidade das duas bases, como fica evidente na aplicação que ele faz

desta palavra durante a prova deste teorema.[64] Neste caso temos um prisma com base triangular. Pelo Lema 5 de *O Método*, citado na Seção 10.2, página 78 deste trabalho, sabemos que o centro de gravidade do triângulo $\eta\theta\mu$ da Figura 10.58 (a) é o ponto $\psi$ ao longo da reta $\theta\xi$ que satisfaz à seguinte relação:

$$\theta\psi = \frac{2}{3}\theta\xi \ . \tag{10.143}$$

Este ponto $\psi$ indicado na Figura 10.62 é também o centro de gravidade do prisma passando por $\eta\theta\mu$, já que este plano é perpendicular ao eixo do prisma, dividindo-o em duas partes iguais.

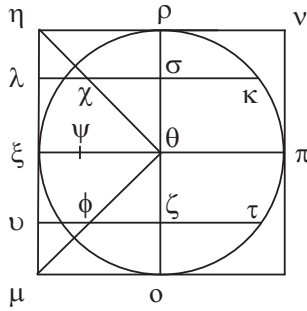



Figura 10.62: O ponto $\psi$ é o centro de gravidade do prisma triangular.

Pelo sexto Postulado da obra *Sobre o Equilíbrio dos Planos* citado na Subseção 7.1.3, página 47 deste trabalho, vem que esta alavanca vai continuar em equilíbrio quando o prisma atuar sobre a alavanca concentrado apenas no seu centro de gravidade, ou seja, como se todo o seu peso estivesse concentrado neste ponto. Essa alavanca em equilíbrio está representada na Figura 10.63.

Pela lei da alavanca temos então que:

$$\frac{Unha\ cilíndrica}{Prisma\ triangular} = \frac{\frac{2}{3}\theta\xi}{\theta\pi} \ . \tag{10.144}$$

Mas:

$$\theta\xi = \theta\pi \ . \tag{10.145}$$

Então:

$$\frac{Unha\ cilíndrica}{Prisma\ triangular} = \frac{2}{3} \ . \tag{10.146}$$

Sendo o volume do prisma triangular 1/4 do volume do prisma total, concluímos que:

$$Unha\ cilíndrica = \frac{1}{6}Prisma \ . \tag{10.147}$$

[64] [Arc87, pág. 316, Nota 1], [Ass10, pág. 109] e [Ass08, pág. 131].

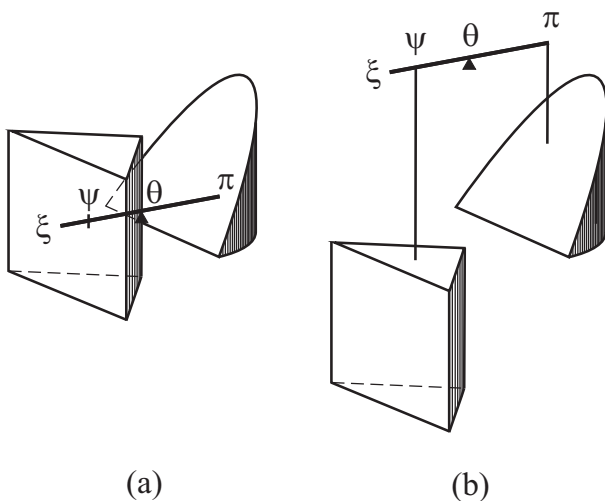



Figura 10.63: (a) Situação final de equilíbrio da alavanca ao redor do ponto $\theta$ com o prisma atuando apenas sobre $\psi$, enquanto que a unha atua apenas sobre a extremidade $\pi$. (b) Mesma situação no caso em que os dois sólidos estão dependurados por fios de pesos desprezíveis. O centro de gravidade do prisma está verticalmente abaixo de $\psi$, enquanto que o centro de gravidade da unha está verticalmente abaixo de $\pi$.

## 10.14 Demonstração Física do Teorema XIV: Uma Outra Determinação do Volume da Unha Cilíndrica

Neste teorema Arquimedes apresenta um caminho diferente e mais simples para alcançar o mesmo objetivo dos dois teoremas anteriores, a saber, a determinação do volume da unha cilíndrica.

Seja novamente um prisma reto de bases quadradas, no qual está inscrito um cilindro. Na Figura 10.64 a base do prisma é representada pelo quadrado $\alpha\beta\gamma\delta$, enquanto que a base do cilindro é o círculo $\varepsilon\zeta\eta\theta$.

Traçamos um plano passando pelo segmento $\varepsilon\eta$ e pelo lado correspondente a $\gamma\delta$ no quadrado oposto à base $\alpha\beta\gamma\delta$. O plano assim traçado determina a unha cilíndrica no cilindro. O mesmo plano determina no prisma um outro prisma cujo volume é 1/4 do volume do prisma total. Este novo prisma é delimitado por três paralelogramos e por dois triângulos opostos, como pode ser visto na Figura 10.65 (a).

Seja traçada no semicírculo $\varepsilon\zeta\eta$, que é a base da unha cilíndrica, uma parábola passando pelos pontos $\varepsilon$, $\eta$ e $\zeta$, Figura 10.65 (a).

Seja traçada no paralelogramo $\gamma\delta\varepsilon\eta$ da Figura 10.64 uma reta qualquer $\mu\nu$ paralela ao diâmetro $\zeta\kappa$. Esta reta encontrará a parábola no ponto $\lambda$ e a circunferência do círculo $\varepsilon\zeta\eta\theta$ no ponto $\xi$, Figura 10.66 (a) e (c). Sobre a reta $\mu\nu$

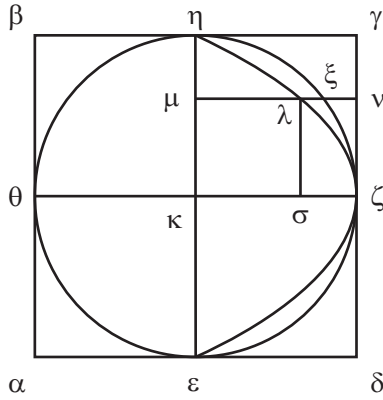



Figura 10.64: Construção geométrica do Teorema XIV.

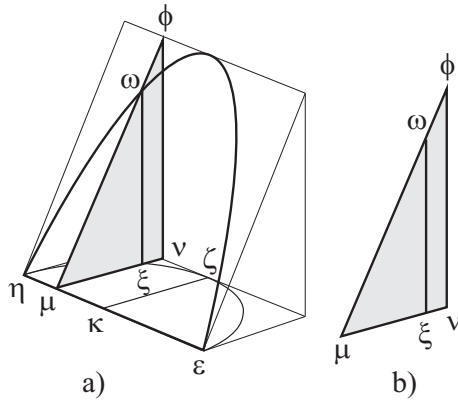



Figura 10.65: (a) Vista lateral do prisma e da unha cilíndrica. (b) Triângulos semelhantes $\mu\nu\phi$ e $\mu\xi\omega$ obtidos pelo plano cortante.

seja levantado um plano perpendicular ao segmento $\varepsilon\eta$. Este plano cortará do prisma um triângulo retângulo $\mu\nu\phi$, ver a Figura 10.66 (a). Este plano também cortará a unha cilíndrica segundo um outro triângulo retângulo $\mu\xi\omega$, Figura 10.66 (b).

A partir da Equação da parábola $\varepsilon\zeta\eta$ e das características geométricas dos pontos traçados na Figura 10.66 (c), demonstra-se na Seção A.8 do Apêndice A que:

$$\frac{\mu\nu}{\lambda\mu} = \frac{Q(\mu\nu)}{Q(\mu\xi)} = \frac{\mu\nu \cdot \mu\nu}{\mu\xi \cdot \mu\xi} \ . \tag{10.148}$$

Nesta equação indicamos com Q($\mu\nu$) e Q($\mu\xi$) os quadrados de lados $\mu\nu$ e $\mu\xi$, respectivamente.

Também demonstra-se, pela semelhança dos triângulos $\mu\nu\phi$ e $\mu\xi\omega$, que a área

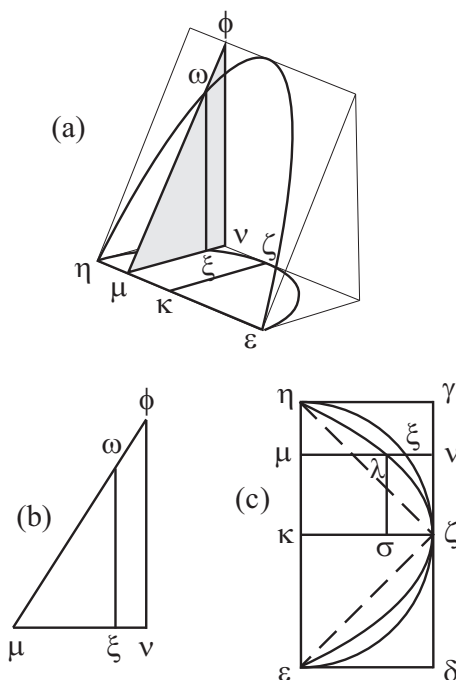



Figura 10.66: (a) Perspectiva do prisma com a unha cilíndrica. (b) Vista lateral dos triângulos obtidos pelo plano cortante. (c) Vista da base.

do triângulo $\mu\nu\phi$ está para a área do triângulo $\mu\xi\omega$ assim como o quadrado de $\mu\nu$ está para o quadrado de $\mu\xi$:

$$\frac{Tri\hat{a}ngulo\ \mu\nu\phi}{Tri\hat{a}ngulo\ \mu\xi\omega} = \frac{Q(\mu\nu)}{Q(\mu\xi)} = \frac{\mu\nu \cdot \mu\nu}{\mu\xi \cdot \mu\xi}\ . \tag{10.149}$$

Mas o triângulo $\mu\nu\phi$ é o triângulo do prisma e o triângulo $\mu\xi\omega$ é o triângulo da unha cilíndrica. Portanto, destas duas últimas equações temos que:

$$\frac{Tri\hat{a}ngulo\ do\ prisma}{Tri\hat{a}ngulo\ da\ unha} = \frac{Q(\mu\nu)}{Q(\mu\xi)} = \frac{\mu\nu \cdot \mu\nu}{\mu\xi \cdot \mu\xi} = \frac{\mu\nu}{\lambda\mu}\ . \tag{10.150}$$

Da mesma maneira, demonstra-se que estas conclusões são válidas para qualquer outra reta paralela a $\zeta\kappa$ juntamente com o plano correspondente perpendicular a $\varepsilon\eta$. Mas o prisma é preenchido por todos os triângulos $\mu\nu\phi$, enquanto que a unha cilíndrica é preenchida por todos os triângulos $\mu\xi\omega$.

Por outro lado, todas as retas $\mu\nu$ preenchem o paralelogramo $\gamma\delta\varepsilon\eta$, enquanto que todas as retas $\lambda\mu$ preenchem o segmento de parábola $\varepsilon\zeta\eta$.

Então concluímos que:

$$\frac{Prisma}{Unha\ cil\acute{i}ndrica} = \frac{Paralelogramo\ \gamma\delta\varepsilon\eta}{Segmento\ de\ par\acute{a}bola\ \varepsilon\zeta\eta}\ . \tag{10.151}$$

Mas foi demonstrado anteriormente[65] que a área do segmento de parábola é igual a 4/3 da área do triângulo com a mesma base e a mesma altura (triângulo $\varepsilon\zeta\eta$ na Figura 10.66 (c)). Mas a área desse mesmo triângulo é igual a metade da área do paralelogramo (retângulo) $\gamma\delta\varepsilon\eta$. Portanto, temos que:

$$Paralelogramo\ \gamma\delta\varepsilon\eta = \frac{3}{2}(Segmento\ de\ parábola\ \varepsilon\zeta\eta)\ . \tag{10.152}$$

Das Equações (10.151) e (10.152) vem que:

$$\frac{Prisma}{Unha\ cilíndrica} = \frac{3}{2}\ . \tag{10.153}$$

Ou seja:

$$Unha\ cilíndrica = \frac{2}{3}(Prisma)\ . \tag{10.154}$$

Mas o volume do prisma considerado na dedução é 1/4 do volume do prisma total que consta do enunciado dos Teoremas XII, XIII e XIV. Com isto chegamos então na formulação matemática deste teorema, a saber:

$$Unha\ cilíndrica = \frac{1}{6}(Prisma\ total)\ . \tag{10.155}$$

### 10.14.1 Importância dos Teoremas XII a XIV

- Em seu trabalho *Sobre Conoides e Esferoides* Arquimedes já havia obtido o volume de elipsoides, paraboloides e hiperboloides de revolução em termos dos volumes de certos cones e cilindros. Mas não se encontrou nenhum paralelepípedo que tivesse seu volume igual ao destes elipsoides, paraboloides e hiperboloides de revolução. Já no caso dos teoremas atuais, Arquimedes encontrou o volume da unha cilíndrica como sendo a sexta parte do prisma circunscrito à unha. Ou seja, obteve o volume de uma figura delimitada por uma superfície curva em termos do volume do paralelepípedo. Este resultado é análogo ao resultado do Teorema I, já que então havia obtido a área de uma figura delimitada por uma linha curva, a parábola, em termos da área de uma figura delimitada apenas por retas, o triângulo inscrito na parábola.

  A relevância principal destes Teoremas XII a XIV foi apontada pelo próprio Arquimedes na carta introdutória de *O Método* endereçada a Eratóstenes. Após enunciar o teorema sobre o volume da unha cilíndrica afirmou o seguinte, ao comparar o volume de certas figuras tridimensionais curvas com o volume de paralelogramos:[66]

  > Mas acontece que estes teoremas [volume da unha cilíndrica e volume obtido pela intersecção de dois cilindros] são diferentes daqueles encontrados anteriormente. Com efeito, [anteriormente] comparamos

[65] Ou seja, no Teorema I de *O Método*.

[66] Ver a página 144 deste trabalho.

> aquelas figuras [sólidas, isto é], os conoides, os esferoides[67] e seus segmentos, ao volume de cones e cilindros, e nenhuma delas foi encontrada equivalente a uma figura sólida delimitada por planos, enquanto que cada uma destas figuras sólidas [ou seja, o volume da unha cilíndrica e o volume obtido pela intersecção de dois cilindros], delimitadas por dois planos e superfícies cilíndricas, é encontrada equivalente a uma figura sólida delimitada por planos.

- Os últimos teoremas de *O Método* referem-se a cilindros cortados por planos, ou inscritos em prismas. É interessante observar aqui o interesse prático que despertaram alguns desses teoremas ao longo dos séculos.

  No século I d.C. Heron de Alexandria, como já foi visto no Capítulo 6, estudou o volume definido pelo entrelaçamento de dois cilindros, usando este tratado de Arquimedes.

  No V século d.C. os arquitetos Antêmio de Trales e Isidoro de Mileto, ao construir a igreja de Santa Sofia em Constantinopla, se inspiraram no último teorema de *O Método*, cuja demonstração hoje está perdida definitivamente, mas cujo enunciado encontra-se na introdução da carta que Arquimedes enviou para Eratóstenes:[68]

  > Se em um cubo for inscrito um cilindro tendo suas bases sobre quadrados opostos e sua superfície [lateral] tangente aos quatro planos restantes, e seja inscrito no mesmo cubo um outro cilindro tendo suas bases em outros [dois] paralelogramos e a superfície tangente aos quatro planos restantes, a figura delimitada pelas superfícies dos cilindros e situada no [interior dos] dois cilindros é dois terços de todo o cubo.

  A demonstração deste último teorema pode ser feita pelo método mecânico ou por demonstração geométrica.[69]

  A aplicação prática do cálculo do volume deste sólido resultou na cúpula da igreja de Santa Sofia em Istambul, que é considerada como o mais belo exemplo da arte bizantina e de muitas outras cúpulas de igrejas ainda hoje existentes como, por exemplo, a catedral de Todi na Itália, Figura 10.67.

- O Teorema XIII pode ser usado para encontrar o centro de gravidade de um semicírculo, como mostrado no Apêndice E.

[67]Arquimedes refere-se aqui ao tratado *Sobre Conoides e Esferoides* enviado por carta a Dositeu. Este tratado estuda os sólidos que hoje chamamos de *paraboloides, elipsoides* e *hiperboloides* de revolução.

[68]Ver a página 144 deste trabalho.

[69][Arc02a, págs. 48-51].

Figura 10.67: Cúpula bizantina da catedral de Todi, Itália.

# Capítulo 11

# A Tradução Comentada de *O Método*

Apresentamos a seguir a nossa tradução deste livro, a partir do texto grego original.[1] Os trechos entre colchetes não estão no texto grego original, mas foram acrescentados por nós visando facilitar a compreensão de algumas frases e expressões.

---

**DE ARQUIMEDES PARA ERATÓSTENES,**
**O MÉTODO SOBRE OS TEOREMAS MECÂNICOS**

## 11.1 Introdução

Arquimedes a Eratóstenes, saudações.

Eu te enviei anteriormente alguns teoremas que encontrei, tendo indicado seus enunciados, convidando-te a encontrar as demonstrações que não mostrei até o momento. Estes eram os enunciados dos teoremas enviados:

Do primeiro:

> "Se em um prisma reto tendo por base um paralelogramo,[2] for inscrito um cilindro tendo suas bases [situadas] nos paralelogramos opostos e seus lados[3] nos planos restantes do prisma, e se pelo centro do círculo de base do cilindro e por um lado do quadrado situado na face oposta for traçado um plano, o plano traçado cortará do cilindro um segmento limitado por dois planos e pela superfície do cilindro, um dos planos [sendo] o plano

[1] [Arc71] e [Arc11c].

[2] Arquimedes, quase sempre, usa o termo *paralelogramo* com o sentido de retângulo ou quadrado. Neste caso específico trata-se de um quadrado.

[3] Por *lados* do cilindro, Arquimedes entende as suas geratrizes.

> traçado, enquanto que o outro [é] aquele que contém a base do cilindro e a superfície [cilíndrica] limitada pelos planos indicados; o segmento cortado do cilindro é a sexta parte de todo o prisma."

Este o enunciado do segundo teorema:[4]

> "Se em um cubo for inscrito um cilindro tendo suas bases sobre paralelogramos[5] opostos e sua superfície [lateral] tangente aos quatro planos restantes, e se for inscrito no mesmo cubo um outro cilindro tendo suas bases em outros [dois] paralelogramos e a superfície tangente aos quatro planos restantes, a figura delimitada pelas superfícies dos cilindros e situada no [interior dos] dois cilindros é dois terços de todo o cubo."

Mas acontece que estes teoremas são diferentes daqueles encontrados anteriormente. Com efeito, comparamos aquelas figuras [sólidas, isto é], os conoides, os esferoides[6] e seus segmentos, ao volume de cones e cilindros, e nenhuma delas foi encontrada equivalente a uma figura sólida delimitada por planos, enquanto que cada uma destas figuras sólidas, delimitadas por dois planos e superfícies cilíndricas, é encontrada equivalente a uma figura sólida delimitada por planos.[7]

Te envio as demonstrações destes teoremas, redigidas neste livro.

Mas percebendo, como afirmo, que você é estudioso, que domina de modo excelente a filosofia e que sabe apreciar a pesquisa matemática sobre as coisas que se apresentem, considerei [interessante] descrever e definir neste mesmo livro as características de um método pelo qual será possível adquirir os recursos para poder abordar assuntos de matemática por meio de considerações mecânicas. Por outro lado, estou persuadido de que este método não é menos útil também para a demonstração destes mesmos teoremas. Com efeito, certas propriedades que inicialmente me pareceram evidentes por via mecânica, foram demonstradas posteriormente por via geométrica, pois uma demonstração feita por meio desse método [mecânico] não corresponde a uma verdadeira demonstração. Porém, é mais fácil conseguir a demonstração depois de ter adquirido algum conhecimento

---

[4] Não se encontrou a demonstração deste Teorema nas páginas que ainda existem de *O Método*.

[5] Aqui também fica claro que o paralelogramo é um quadrado.

[6] Arquimedes refere-se aqui ao tratado *Sobre Conoides e Esferoides* enviado por carta a Dositeu. Este tratado estuda os sólidos que hoje chamamos de *paraboloides, elipsoides* e *hiperboloides* de revolução.

[7] A "equivalência" a que Arquimedes se refere neste parágrafo tem o mesmo sentido da igualdade entre volumes de figuras com formatos diferentes. Heath apresentou esta última frase de Arquimedes da seguinte maneira, [Arc02a, pág. 13]:

> Agora esses teoremas possuem características diferentes daqueles comunicados anteriormente; pois [inicialmente] comparamos as figuras que estavam sendo discutidas, conoides e esferoides e segmentos dessas figuras, em relação ao volume, com figuras de cones e cilindros: mas nenhuma dessas figuras foi encontrada igual a uma figura sólida limitada por planos; enquanto que cada uma das figuras atuais limitadas por dois planos e superfícies de cilindros é encontrada como sendo igual a uma das figuras sólidas que são limitadas por planos.

dos objetos da pesquisa por meio desse método, do que procurar sem nenhum conhecimento. [Por esse motivo,] daqueles teoremas sobre o cone e a pirâmide, dos quais Eudoxo[8] foi o primeiro a encontrar a demonstração, [ou seja] que o cone é a terceira parte do cilindro e a pirâmide a terceira parte do prisma, tendo mesma base e mesma altura, deve-se atribuir uma parte não pequena a Demócrito,[9] que foi o primeiro a revelar o enunciado dessa propriedade das figuras indicadas, sem demonstração.

Mas acontece que a descoberta dos teoremas agora demonstrados me ocorreu da mesma maneira que para os teoremas precedentes. Assim decidi redigir e publicar esse método por ter falado dele anteriormente[10] e para não parecer a alguns que tenha dito palavras vazias, [e também] porque estou persuadido de que [este método] trará uma contribuição não pequena para a matemática. Pois sou da opinião de que alguns dos contemporâneos ou sucessores encontrarão, por meio do método demonstrado, outros teoremas que ainda não me ocorreram.

Portanto, descrevo inicialmente o primeiro [teorema] que me foi revelado pela mecânica. Isto é, que todo segmento de parábola[11] é [equivalente a] quatro terços do triângulo que tem mesma base e mesma altura. Em seguida [descrevo] cada um [dos outros teoremas] examinados pelo mesmo método. No fim do livro apresento as demonstrações geométricas dos teoremas cujos enunciados já enviei a você.

## 11.2 Lemas

1. Se[12] de uma grandeza for retirada uma outra grandeza, e se o mesmo ponto é o centro de gravidade da grandeza inteira e da grandeza retirada, este mesmo ponto é o centro de gravidade da [grandeza] restante.[13]

---

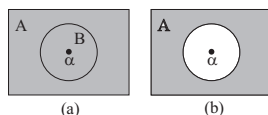
[8] Ver a Seção 4.2.

[9] Ver a Seção 4.1.

[10] Ver a carta para Dositeu que aparece em seu trabalho *Quadratura da Parábola*, [Arc02b, págs. 233-234].

[11] O termo "parábola" foi introduzido posteriormente por Apolônio de Pérga (262-190 a.C.). Arquimedes chama a parábola de "seção de cone reto."

[12] Mugler, Rufini e Dijksterhuis utilizam aqui a palavra "Lemas," enquanto que Heath usa o termo "Proposições," [Arc71, pág. 84], [Arc61, pág. 104], [Arc87, pág. 315] e [Arc02a, pág. 14]. De acordo com Mugler a palavra do texto grego que corresponde a essas traduções, $\pi\rho o\lambda\alpha\mu\beta\alpha\nu\acute{o}\mu\epsilon\nu\alpha$ ["prolambanomena", ou "lemas"], parece ter sido acrescentada por Heiberg.

[13] Sejam três grandezas $A$, $B$ e $C$ tal que $C = A + B$. Na letra (a) da Figura abaixo $B$ é o círculo com centro de gravidade representado pelo ponto $\alpha$, $C$ é o retângulo cheio com centro de gravidade coincidindo com $\alpha$, enquanto que $A$ é o retângulo oco (ou seja, $C$ menos o círculo $B$).

Este lema afirma que $\alpha$ também vai ser o centro de gravidade do retângulo oco $A$ ao ser retirado o círculo $B$ do retângulo cheio $C$, como indicado na letra (b) da Figura.

2. Se de uma grandeza for retirada uma outra grandeza, e se o mesmo ponto não [é] o centro de gravidade da grandeza inteira e da grandeza retirada, [então] o centro de gravidade da grandeza restante está sobre o prolongamento da reta que une os centros de gravidade da grandeza inteira e da [parte] retirada, separando da mesma [um segmento] que tenha a mesma razão com a reta entre os centros indicados que tem o peso da grandeza retirada com o peso da grandeza restante.[14, 15]

3. Se os centros de gravidade de um número tão grande quanto se queira de grandezas estiverem situados sobre a mesma reta, [então] o centro de gravidade da grandeza composta por todas essas grandezas, também estará sobre a mesma reta.[16]

4. O centro de gravidade de todo [segmento] de reta é o ponto que divide o segmento em duas partes iguais.[17]

5. O centro de gravidade de todo triângulo é o ponto de interseção das retas traçadas dos ângulos do triângulo aos pontos médios dos lados [opostos].[18]

6. O centro de gravidade de todo paralelogramo é o ponto de encontro das diagonais.[19]

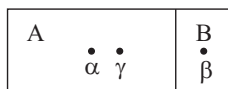
7. O centro de gravidade de um círculo é também o centro do círculo.

8. O centro de gravidade de todo cilindro é o [ponto] que divide o eixo em duas partes iguais.

9. O centro de gravidade de todo prisma é o [ponto] que divide o eixo em duas partes iguais.[20]

---

[14] Ver *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Livro I, Proposição 8, [Arq08, pág. 230].

[15] Sejam três grandezas $A$, $B$ e $C$ tal que $C = A + B$. Vamos representar seus centros de gravidade por $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$. Seus pesos serão dados por $P_A$, $P_B$ e $P_C$. A distância entre $\alpha$ e $\gamma$ será representada por $d_A$, enquanto que a distância entre $\beta$ e $\gamma$ será representada por $d_B$. Na Figura abaixo estas três grandezas estão representadas por retângulos. Podemos considerar $A$ como a grandeza restante, $B$ como a grandeza retirada, e $C = A + B$ como a grandeza inteira.

Este Lema afirma que $\alpha$ está ao longo do prolongamento da reta unindo $\beta$ com $\gamma$, de tal maneira que:

$$\frac{d_A}{d_B} = \frac{P_B}{P_A} . \qquad (11.1)$$

[16] Ver *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Livro I, Proposições 4 e 5, [Arq08, págs. 224 e 225], e Livro II, Proposição 2, [Ass97].

[17] Ver *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Livro I, Proposição 4, [Arq08, pág. 224].

[18] Ver *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Livro I, Proposição 14, [Arq08, pág. 238].

[19] Ver *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Livro I, Proposição 10, [Arq08, pág. 232].

[20] O "eixo" a que se refere aqui é o segmento de reta unindo os centros de gravidade das duas bases, como fica evidente na aplicação que Arquimedes faz desta palavra na Proposição 13 de *O Método*, [Arc87, pág. 316, Nota 1], [Ass10, pág. 109] e [Ass08, pág. 131].

10. O centro de gravidade de todo cone está situado sobre o eixo, dividindo-o de modo que o segmento próximo do vértice seja o triplo do restante.[21]

Nos serviremos também deste teorema,[22] já escrito no [livro] *Sobre Conoides*:[23]

> Se grandezas em qualquer número possuem a mesma razão com outras grandezas de mesmo número, tomadas duas a duas na mesma posição, e se, além disso, as primeiras grandezas, seja em sua totalidade seja em parte, possuem uma razão qualquer com outras grandezas, e se as segundas grandezas possuem na mesma ordem, a mesma razão com outras grandezas, [então] a razão entre a soma das primeiras grandezas e a soma das grandezas que foram ditas proporcionais a elas, é igual à razão entre a soma das segundas grandezas e a soma das grandezas ditas [proporcionais a elas].[24]

## 11.3 Teorema I: Área de um Segmento Parabólico

Seja um segmento [de parábola] $\alpha\beta\gamma$ compreendido entre uma reta $\alpha\gamma$ e uma parábola $\alpha\beta\gamma$.[25] Divida-se $\alpha\gamma$ em duas partes iguais pelo ponto $\delta$, seja traçada $\beta\delta\varepsilon$ paralela ao diâmetro,[26] e sejam unidas as [retas] $\alpha\beta$ e $\beta\gamma$.

> *Digo que o segmento [de parábola] $\alpha\beta\gamma$ é [equivalente a] quatro terços do triângulo $\alpha\beta\gamma$.*[27]

[21] Não se encontra a prova deste Lema nas obras de Arquimedes que chegaram até nós. Para uma reconstrução desta demonstração seguindo o método de Arquimedes utilizando alavancas em equilíbrio, ver o Apêndice F.

[22] O Teorema ou Proposição a seguir é algumas vezes citado como sendo o Lema 11 de *O Método*.

[23] Ver *Sobre Conoides e Esferoides*, Proposição 1, [Arc02b, págs. 105-106].

[24] [Ruf61, pág. 106] e [Arc02b, págs. 105-106]: Em notação moderna, sejam as grandezas: $A_1, A_2, ..., A_n$ e $B_1, B_2, ..., B_n$, tais que: $A_1/A_2 = B_1/B_2$; $A_2/A_3 = B_2/B_3$; etc. Sejam também as seguintes sequências de grandezas: $C_1, C_2, ..., C_n$ e $D_1, D_2, ..., D_n$, tais que: $A_1/C_1 = B_1/D_1$; $A_2/C_2 = B_2/D_2$; etc. Então teremos:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} A_i}{\sum_{i=1}^{n} C_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} B_i}{\sum_{i=1}^{n} D_i} . \tag{11.2}$$

[25] Ver a Figura 11.1.

[26] O texto de Arquimedes neste ponto diz claramente *paralela ao diâmetro*. Portanto, isto indica que se trata de um caso geral. A figura que é apresentada aqui está de acordo com Mugler, [Mug71b, pág. 86], já que estamos seguindo seu texto em nossa tradução. Esta figura de Mugler dá a impressão que a prova se refere apenas ao caso particular no qual a base do segmento é ortogonal ao diâmetro, representado em nossa Figura 10.2 (a). Mas a prova de Arquimedes se aplica também ao caso geral no qual a base do segmento pode estar inclinada em relação ao diâmetro, Figura 10.2 (b). O caso geral foi discutido na Seção 10.2.

[27] A equivalência aqui se refere à igualdade de áreas, ou seja, a área do segmento parabólico $\alpha\beta\gamma$ é igual a quatro terços da área do triângulo $\alpha\beta\gamma$.

Figura 11.1: Figura do Teorema I.

Sejam traçadas a partir dos pontos $\alpha$ e $\gamma$ a [reta] $\alpha\zeta$ paralela a $\beta\delta\varepsilon$ e a [reta] $\gamma\zeta$ tangente à parábola, e prolongue-se $\beta\gamma$ até o ponto $\kappa$. Seja $\gamma\kappa$ igual a $\theta\kappa$. Imagine-se que $\gamma\theta$ seja uma alavanca e $\kappa$ o seu meio,[28] e seja $\mu\xi$ uma paralela qualquer a $\varepsilon\delta$.

Portanto, como $\alpha\beta\gamma$ é uma parábola, como $\gamma\zeta$ é uma tangente e como $\gamma\delta$ é [traçada] ordenadamente,[29] $\beta\varepsilon$ é igual a $\beta\delta$, como está demonstrado nos *Elementos*.[30] Por este motivo e por serem $\alpha\zeta$ e $\mu\xi$ paralelas a $\varepsilon\delta$, $\mu\nu$ é igual[31] a $\nu\xi$ e $\zeta\kappa$ [é igual] a $\alpha\kappa$.[32] E como $\alpha\gamma$ está para $\alpha\xi$ assim como $\mu\xi$ está para $\xi o$, pois está demonstrado em um Lema,[33] e como $\alpha\gamma$ está para $\alpha\xi$ assim como $\gamma\kappa$ está para $\kappa\nu$ e como, [finalmente,] $\gamma\kappa$ é igual a $\theta\kappa$, a razão entre $\theta\kappa$ e $\kappa\nu$ é igual à razão entre $\mu\xi$ e $\xi o$.

E como o ponto $\nu$ é o centro de gravidade[34] da reta $\mu\xi$, pois $\mu\nu$ é igual a

[28]O ponto $\kappa$ será considerado o fulcro da alavanca.

[29]Com esse termo "ordenadamente," Arquimedes entende que o segmento de reta $\gamma\delta$ é paralelo à tangente da parábola em $\beta$. Em época posterior este segmento de reta será chamado de *ordenada*. Ver a Seção 9.2.

[30]No Apêndice B, Seção B.3, apresentamos uma demonstração desta afirmação. O livro *Elementos* a que Arquimedes se refere aqui não é a famosa obra de geometria de Euclides, já que esta não trata das cônicas. Provavelmente estes *Elementos* se referem aqui a uma obra anterior de Aristeu ou de Euclides, atualmente perdidas, que tratavam das propriedades básicas ou elementares das seções cônicas, [Arq66, págs. 38 e 91, Nota 5] e [Arc61, págs. 108-109].

[31]Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro V, Proposição 9, [Euc09, pág. 216]: "As [grandezas] que têm a mesma razão para a mesma [grandeza] são iguais entre si; e aquelas, para as quais a mesma [grandeza] tem a mesma razão, são iguais."

[32]As deduções geométricas aqui descritas podem ser melhor verificadas na Seção A.1 do Apêndice A.

[33] Apresentamos uma demonstração deste Lema no Apêndice A, Seção A.1.

[34]Ver o Lema 4.

$\nu\xi$, se colocarmos [o segmento de reta] $\eta\tau$, igual a $\xi o$, de modo que o seu centro de gravidade seja o [ponto] $\theta$ e que $\theta\tau$ seja igual a $\eta\theta$, o [segmento de reta] $\eta\theta\tau$, equilibrará o [segmento de reta] $\mu\xi$, permanecendo em seu lugar, pois $\theta\nu$ está cortado na razão inversa dos pesos $\eta\tau$ e $\mu\xi$, e [devido a que] $\theta\kappa$ está para $\kappa\nu$ assim como[35] $\mu\xi$ está para $\eta\tau$. Portanto, o centro de gravidade [da grandeza composta por] estes dois pesos[36] é [o ponto] $\kappa$.

Da mesma maneira, quantas paralelas a $\delta\varepsilon$ forem traçadas no triângulo $\alpha\gamma\zeta$ equilibrarão, permanecendo nos seus lugares, os segmentos cortados delas pela parábola e transportados ao ponto $\theta$, de modo que o centro de gravidade da grandeza composta por uns e por outros seja o ponto $\kappa$. E desde que o triângulo $\alpha\gamma\zeta$ é constituído pelos [segmentos de reta] traçados no triângulo $\alpha\gamma\zeta$, e o segmento [de parábola] $\alpha\beta\gamma$ é constituído pelos [segmentos de reta] tomados no segmento [de parábola] da mesma maneira que $\xi o$, então o triângulo $\alpha\gamma\zeta$ equilibrará, permanecendo no seu lugar, o segmento de parábola colocado ao redor do centro de gravidade $\theta$, [o equilíbrio ocorrendo] em relação ao ponto $\kappa$, de modo que o centro de gravidade da soma das duas grandezas seja $\kappa$.

Seja então dividido $\gamma\kappa$ pelo [ponto] $\chi$ de modo que $\gamma\kappa$ seja o triplo de $\kappa\chi$. Portanto, o ponto $\chi$ será o centro de gravidade do triângulo $\alpha\zeta\gamma$, como foi demonstrado no livro *Sobre os Equilíbrios*.[37] E posto que o triângulo $\alpha\gamma\zeta$, permanecendo no seu lugar, equilibra-se em relação ao ponto $\kappa$ com o segmento [de parábola] $\alpha\beta\gamma$ colocado ao redor do centro de gravidade $\theta$, e [posto] que o centro de gravidade do triângulo $\alpha\gamma\zeta$ é o ponto $\chi$, [então] a razão entre o triângulo $\alpha\zeta\gamma$ e o segmento [de parábola] $\alpha\beta\gamma$ colocado ao redor do centro [de gravidade] $\theta$ é igual à razão entre $\theta\kappa$ e $\kappa\chi$. Agora, $\theta\kappa$ é o triplo de $\kappa\chi$. Portanto, o triângulo $\alpha\zeta\gamma$ é também o triplo do segmento $\alpha\beta\gamma$. Mas o triângulo $\alpha\gamma\zeta$ é também o quádruplo do triângulo $\alpha\beta\gamma$, pois $\zeta\kappa$ é igual a $\alpha\kappa$, e $\alpha\delta$ é igual[38] a $\gamma\delta$. Consequentemente, o segmento [de parábola] $\alpha\beta\gamma$ é [equivalente a] quatro terços do triângulo $\alpha\beta\gamma$.

Isto certamente não foi demonstrado pelo que foi dito,[39] mas leva a crer que a conclusão seja verdadeira. Portanto, vendo que [a propriedade] não está demonstrada, mas pressentindo que a conclusão é verdadeira, daremos a demonstração geométrica, que nós mesmos encontramos e publicamos anteriormente.[40]

## 11.4 Teorema II: Volume da Esfera

*Toda esfera é o quádruplo do cone que tem sua base igual ao círculo*

[35] *Sobre o Equilíbrio dos Planos,* Livro I, Proposições 6 e 7, [Arq08, págs. 227 e 229].

[36] Ver o Lema 3.

[37] Ver o Lema 5 e *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Livro I, Proposição 15, [Arq08, pág. 239].

[38] De fato, a partir da proporção $\gamma\delta/\alpha\gamma = \beta\delta/\alpha\kappa$, deduzimos que $\beta\delta = (1/2)\alpha\kappa = (1/4)\alpha\zeta$. Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 4, citada na Subseção 9.3.1, página 68 deste trabalho, ver ainda [Euc09, pág. 235] e [Euc56a, Volume 2, pág. 200].

[39] Este parágrafo consta originalmente no início do Teorema II relacionado ao volume da esfera. Mas como ele ainda trata da área da parábola, nos pareceu mais apropriado deslocá-lo para o fim do Teorema I.

[40] Ver a *Quadratura da Parábola*, Proposições 14 a 17, [Mug71a, pág. 178 a 186]. Mas a demonstração geométrica prometida aqui para o tratado *O Método* não foi encontrada.

*máximo da esfera e uma altura igual ao raio da esfera; e o cilindro que tem uma base igual ao círculo máximo de uma esfera e uma altura igual ao diâmetro da esfera é [equivalente a] três meios da esfera.*[41]

Assim analisa-se por este método:

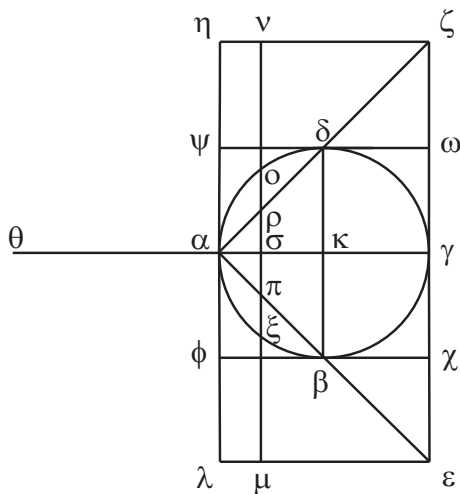



Figura 11.2: Figura do Teorema II.

Seja uma esfera, na qual $\alpha\beta\gamma\delta$ é o círculo máximo, assim como $\alpha\gamma$ e $\beta\delta$ diâmetros perpendiculares entre si. Seja, na esfera, um círculo de diâmetro $\beta\delta$, perpendicular ao círculo $\alpha\beta\gamma\delta$. Sobre este círculo perpendicular seja construído um cone com vértice no ponto $\alpha$. Prolongue-se a superfície [lateral] do cone e corte-se o cone com um plano [passando] por $\gamma$ e paralelo à base do cone. Portanto, [a interseção] será um círculo perpendicular a $\alpha\gamma$, com diâmetro $\varepsilon\zeta$.

Sobre este círculo seja construído um cilindro tendo o eixo igual a $\alpha\gamma$. Sejam $\varepsilon\lambda$ e $\zeta\eta$ os lados do cilindro.[42] Prolongue-se $\alpha\gamma$ e coloque-se sobre o prolongamento $\alpha\theta$ igual a $\alpha\gamma$. Imagine-se que $\gamma\theta$ seja uma alavanca cujo meio seja $\alpha$.[43]

Seja traçada $\mu\nu$, uma paralela qualquer a $\beta\delta$, a qual corte o círculo $\alpha\beta\gamma\delta$ em $\xi$ e $o$, o diâmetro $\alpha\gamma$ em $\sigma$, a reta $\alpha\varepsilon$ em $\pi$, e a reta $\alpha\zeta$ em $\rho$. Sobre a reta $\mu\nu$ construa-se um plano perpendicular a $\alpha\gamma$. Este [plano] cortará o cilindro segundo um círculo de diâmetro $\mu\nu$, a esfera $\alpha\beta\gamma\delta$ segundo um círculo de diâmetro $\xi o$, e o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ segundo um círculo de diâmetro $\pi\rho$.[44]

[41] A equivalência a que se refere aqui diz respeito à igualdade de volumes. Isto é, Arquimedes vai mostrar que o cilindro que tem uma base igual ao círculo máximo de uma esfera e uma altura igual ao diâmetro da esfera tem o mesmo volume que uma esfera e meia.

[42] As geratrizes do cilindro situadas no plano da figura.

[43] O ponto $\alpha$ será considerado o fulcro da alavanca.

[44] As deduções geométricas aqui descritas podem ser melhor seguidas na Seção A.2 do Apêndice A.

O [retângulo de lados] $\alpha\gamma$ e $\alpha\sigma$ é igual ao [retângulo de lados] $\mu\sigma$ e $\pi\sigma$, por serem iguais[45] $\alpha\gamma$ e $\mu\sigma$ de um lado, e $\alpha\sigma$ e $\pi\sigma$ de outro lado. Além disso, o [retângulo de lados] $\alpha\gamma$ e $\alpha\sigma$ é equivalente ao [quadrado de lado] $\alpha\xi$,[46] isto é, à soma[47] dos quadrados de lados $\xi\sigma$ e $\pi\sigma$. Portanto, o [retângulo de lados] $\mu\sigma$ e $\pi\sigma$ é equivalente à soma dos [quadrados de lados] $\xi\sigma$ e $\pi\sigma$.

Por outro lado, $\alpha\gamma$ está para $\alpha\sigma$ assim como $\mu\sigma$ está para $\pi\sigma$, e $\alpha\gamma$ é igual a $\alpha\theta$. Então, a razão entre $\alpha\theta$ e $\alpha\sigma$ é igual à razão entre $\mu\sigma$ e $\pi\sigma$ e, consequentemente, [é igual] à razão entre o [quadrado] sobre $\mu\sigma$ e o [retângulo de lados] $\mu\sigma$ e $\pi\sigma$.

Mas foi demonstrado que o [retângulo de lados] $\mu\sigma$ e $\pi\sigma$ é equivalente à soma dos [quadrados de lados] $\xi\sigma$ e $\pi\sigma$. Por conseguinte, a razão entre $\alpha\theta$ e $\alpha\sigma$ é igual à razão do [quadrado] sobre $\mu\sigma$ para a soma dos [quadrados] sobre $\xi\sigma$ e $\pi\sigma$.

Então o [quadrado] sobre $\mu\sigma$ está para a soma dos [quadrados] sobre $\xi\sigma$ e $\pi\sigma$ assim como[48] o [quadrado] sobre $\mu\nu$ está para a soma dos [quadrados] sobre $\xi o$ e $\pi\rho$. E esta [última razão] é igual à razão do círculo de diâmetro $\mu\nu$, situado no cilindro, para a soma dos dois círculos, dos quais um, [situado] no cone, tem diâmetro $\pi\rho$, e o outro, [situado] na esfera, tem diâmetro $\xi o$. Portanto, $\alpha\theta$ está para $\alpha\sigma$ assim como o círculo no cilindro está para a soma do círculo na esfera e do círculo no cone.

Nestas condições, sendo que $\alpha\theta$ está para $\alpha\sigma$ assim como o círculo no cilindro, permanecendo no seu lugar, está para a soma dos dois círculos de diâmetros $\xi o$ e $\pi\rho$, deslocados para $\theta$ de modo que $\theta$ seja o centro de gravidade de cada um deles, então estes dois círculos estarão em equilíbrio em relação ao ponto $\alpha$.

Será demonstrado da mesma maneira que, se for traçada uma outra paralela a $\varepsilon\zeta$ no paralelogramo $\zeta\lambda$[49] e se for construído sobre a reta [assim] traçada um plano perpendicular a $\alpha\gamma$, o círculo determinado no cilindro, permanecendo no seu lugar, equilibrará em relação ao ponto $\alpha$, a soma dos dois círculos determinados na esfera e no cone, transportados e colocados sobre a alavanca no ponto $\theta$, de modo que $\theta$ seja o centro de gravidade de cada um dos dois.

Desta maneira, sendo o cilindro, a esfera e o cone assim preenchidos por tais círculos, o cilindro, permanecendo no seu lugar, equilibrará em torno do ponto $\alpha$, a soma da esfera e do cone, deslocados sobre a alavanca para o ponto $\theta$, de modo que $\theta$ seja o centro de gravidade de cada um dos dois. Por consequência, como os ditos sólidos estão em equilíbrio em torno do ponto $\alpha$, o cilindro permanecendo com o centro de gravidade[50] em $\kappa$, sendo a esfera e o cone deslocados, como foi dito, para o centro de gravidade $\theta$, o cilindro estará para a soma da esfera e do

[45] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 4, citada na Subseção 9.3.1, página 68 deste trabalho, ver ainda [Euc09, pág. 235] e [Euc56a, Volume 2, pág. 200].

[46] Ou seja, o retângulo de lados $\alpha\gamma$ e $\alpha\sigma$ tem a mesma área que o quadrado de lado $\alpha\xi$. Uma demonstração desta igualdade encontra-se no Apêndice C.

[47] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro I, Proposição 47, [Euc09, pág. 132]. Nesta Proposição Euclides demonstra o teorema de Pitágoras, a saber: "Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto."

[48] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro V, Proposição 15, [Euc09, pág. 220].

[49] Arquimedes costuma indicar desta maneira o retângulo $\varepsilon\zeta\eta\lambda$.

[50] Ver o Lema 8.

cone assim como $\alpha\theta$ [está] para $\alpha\kappa$.

Mas $\alpha\theta$ é o dobro de $\alpha\kappa$. Portanto, o cilindro é o dobro da soma da esfera e do cone. Mas [o cilindro] é o triplo[51] do próprio cone. Então [a soma] de três cones é equivalente à [soma] de dois destes mesmos cones e de duas esferas. Sejam retirados os dois cones em comum. Por conseguinte, o cone que possui $\alpha\varepsilon\zeta$ como triângulo passando pelo eixo, é equivalente à [soma das] duas esferas mencionadas. Mas o cone que possui $\alpha\varepsilon\zeta$ como triângulo passando pelo eixo é equivalente a oito cones[52] que possuem como triângulo passando pelo eixo o triângulo $\alpha\beta\delta$, por ser $\varepsilon\zeta$ o dobro de $\beta\delta$.

Assim, os oito cones mencionados são equivalentes a duas esferas. Portanto, a esfera de círculo máximo $\alpha\beta\gamma\delta$ é equivalente[53] ao quádruplo do cone que tem como vértice o ponto $\alpha$ e como base o círculo de diâmetro $\beta\delta$ perpendicular a $\alpha\gamma$.

Agora, no paralelogramo[54] $\zeta\lambda$, sejam traçadas pelos [pontos] $\beta$ e $\delta$ as [retas] $\phi\beta\chi$ e $\psi\delta\omega$ paralelas a $\alpha\gamma$, e imagine-se um cilindro tendo por bases os círculos de diâmetro $\phi\psi$ e $\chi\omega$, e como eixo o [segmento] $\alpha\gamma$.

Nestas condições, o cilindro cujo paralelogramo passando pelo eixo é $\phi\omega$,[55] é o dobro[56] do cilindro cujo paralelogramo passando pelo eixo é $\phi\delta$,[57] e este [último cilindro] é o triplo do cone cujo triângulo passando pelo eixo é $\alpha\beta\delta$, como [foi demonstrado] nos *Elementos*.[58] Portanto, o cilindro cujo paralelogramo passando pelo eixo é $\phi\omega$, é o sêxtuplo do cone cujo triângulo passando pelo eixo é $\alpha\beta\delta$. Mas foi demonstrado que a esfera cujo círculo máximo é $\alpha\beta\gamma\delta$, é o quádruplo desse mesmo cone. Então o cilindro é [equivalente a] uma vez e meia a esfera, o que precisava ser demonstrado.[59]

Visto isso, [a saber,] que toda esfera é o quádruplo do cone que tem como base o círculo máximo e altura igual ao raio da esfera, surgiu a ideia de que a superfície de toda esfera[60] fosse o quádruplo de seu círculo máximo. Com efeito, supus que, posto que todo círculo é equivalente a um triângulo tendo por base a circunferência do círculo e por altura o raio do círculo,[61] toda esfera também é equivalente a um cone tendo como base a superfície e como altura o raio da esfera.

---

[51] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XII, Proposição 10, citada na Seção 10.4, página 94 deste trabalho, ver ainda [Euc56a, Volume 3, pág. 400] e [Euc09, pág. 543].

[52] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XII, Proposição 12, citada na Seção 10.4, ver ainda [Euc56a, Volume 3, pág. 410] e [Euc09, pág. 549].

[53] Ver *Sobre a Esfera e o Cilindro*, Livro I, Proposição 34, [Mug70, pág. 78].

[54] Arquimedes chama paralelogramo $\zeta\lambda$ ao retângulo $\varepsilon\zeta\eta\lambda$.

[55] Arquimedes chama paralelogramo $\phi\omega$ ao quadrado $\phi\chi\psi\omega$.

[56] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XII, Proposição 14, citada na Seção 10.4, ver ainda [Euc56a, Volume 3, pág. 419] e [Euc09, pág. 554].

[57] Arquimedes chama $\phi\delta$ ao retângulo $\beta\delta\phi\psi$.

[58] A obra *Elementos* a que se refere aqui pode ser o conhecido livro de Euclides, [Arq66, págs. 44 e 92, Nota 7]. Em particular, ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XII, Proposição 10, citada na Seção 10.4, página 94 deste trabalho, ver ainda [Euc56a, Volume 3, pág. 400] e [Euc09, pág. 543].

[59] Ver *Sobre a Esfera e o Cilindro*, Livro I, Proposição 34, [Mug70, pág. 78].

[60] Ver *Sobre a Esfera e o Cilindro*, Livro I, Proposição 33, [Mug70, pág. 76].

[61] Ver a página 81 e as Figuras 4.4 e 10.9.

## 11.5 Teorema III: Volume do Elipsoide de Revolução

*Mostra-se também por esse método que o cilindro que tem a base igual ao círculo máximo de um elipsoide de revolução*[62] *e a altura igual ao eixo do elipsoide, é equivalente a uma vez e meia o elipsoide.*

*Considerado isto, [fica] evidente que, de todo elipsoide cortado por um plano pelo centro e perpendicular ao eixo, a metade do elipsoide é o dobro do cone que tem a mesma base do segmento [do elipsoide] e o mesmo eixo.*[63]

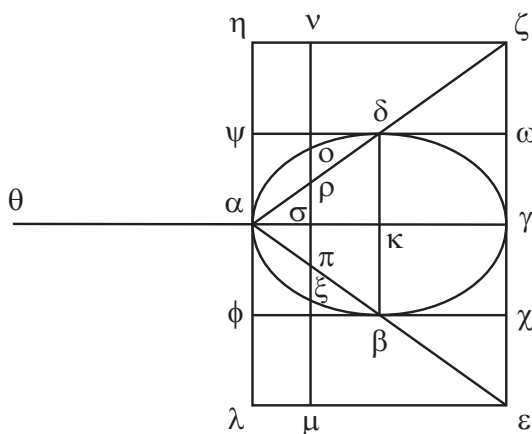



Figura 11.3: Figura do Teorema III.

Seja, com efeito, um elipsoide de revolução cortado por um plano [passando] pelo eixo. Seja $\alpha\beta\gamma\delta$ a elipse[64] determinada na sua superfície, sejam $\alpha\gamma$ e $\beta\delta$ os seus diâmetros e $\kappa$ o seu centro. Seja, no elipsoide, o círculo [descrito] em torno do diâmetro $\beta\delta$, perpendicular ao [segmento de reta] $\alpha\gamma$.

Imagine-se um cone tendo por base o dito círculo e por vértice o ponto $\alpha$. Da superfície prolongada do mesmo, corte-se o cone por um plano [passando] por $\gamma$ paralelo à base. A interseção do mesmo [com o plano] será então um círculo perpendicular a $\alpha\gamma$ tendo $\varepsilon\zeta$ como diâmetro.

Seja também um cilindro tendo por base o mesmo círculo de diâmetro $\varepsilon\zeta$, e como eixo a reta $\alpha\gamma$. Seja [o segmento] $\alpha\theta$ no prolongamento de $\alpha\gamma$ e igual a ele. Imagine-se também $\gamma\theta$ [como] uma alavanca da qual $\alpha$ é o ponto médio.[65] Seja traçada no paralelogramo $\zeta\lambda$ a [reta] $\mu\nu$ paralela a $\varepsilon\zeta$ e seja levantado sobre

[62] Arquimedes usa o termo *esferoide* para designar o que chamamos hoje de elipsoide de revolução.

[63] Ver *Sobre Conoides e Esferoides*, Proposição 27, [Mug70, pág. 226].

[64] A palavra *elipse* é devida a Apolônio. Arquimedes chama a elipse de *seção de cone oxítomo*. A origem do termo *elipse* é apresentada no Capítulo 9.

[65] O ponto $\alpha$ será considerado o fulcro da alavanca.

$\mu\nu$ um plano perpendicular a $\alpha\gamma$. Este [plano] fará interseção com o cilindro segundo um círculo de diâmetro $\mu\nu$, com o elipsoide segundo[66] um círculo de diâmetro $\xi o$ e com o cone segundo um círculo de diâmetro $\pi\rho$.[67]

Posto que $\alpha\gamma$ está para $\alpha\sigma$ assim como[68] $\alpha\varepsilon$ está para $\alpha\pi$, isto é, assim como $\mu\sigma$ está para[69] $\pi\sigma$, e posto que $\alpha\gamma$ é igual $\alpha\theta$, então $\alpha\theta$ [estará] para $\alpha\sigma$ assim como $\mu\sigma$ está para $\pi\sigma$.

Por conseguinte, $\mu\sigma$ [está] para $\pi\sigma$ assim como [o quadrado] sobre $\mu\sigma$ [está] para [o retângulo de lados] $\mu\sigma$ e $\pi\sigma$. Mas o [retângulo de lados] $\mu\sigma$ e $\pi\sigma$ é equivalente [à soma dos quadrados de lados] $\pi\sigma$ e $\xi\sigma$.

Portanto, como a razão entre o [retângulo de lados] $\alpha\sigma$ e $\gamma\sigma$ e o quadrado sobre $\xi\sigma$ é igual à razão entre o [retângulo de lados] $\alpha\kappa$ e $\gamma\kappa$, isto é, o quadrado sobre $\alpha\kappa$, e o quadrado sobre $\beta\kappa$[70] — pois estas duas razões [são iguais à razão] entre o lado transverso e o lado reto[71] — e como a razão do [quadrado] sobre $\alpha\kappa$ para o [quadrado] sobre $\beta\kappa$ é igual[72] à razão [do quadrado] sobre $\alpha\sigma$ para o [quadrado] sobre $\pi\sigma$, então, permutando,[73] o [quadrado] sobre $\alpha\sigma$ estará para o [retângulo] $\alpha\sigma\gamma$,[74] assim como o [quadrado] sobre $\pi\sigma$ está para o [quadrado] sobre $\xi\sigma$.

Mas o [quadrado] sobre $\alpha\sigma$ está para o [retângulo] $\alpha\sigma\gamma$, assim como[75] o [quadrado] sobre $\pi\sigma$ está para o [retângulo de lados] $\pi\sigma$ e $\pi\mu$. Portanto, o [retângulo de lados] $\mu\pi$ e $\pi\sigma$ é equivalente[76] ao [quadrado] sobre $\xi\sigma$. Seja adicionado o [quadrado] comum sobre $\pi\sigma$.

Portanto, o [retângulo de lados] $\mu\sigma$ e $\pi\sigma$ é equivalente [à soma] dos [quadrados] sobre $\pi\sigma$ e $\xi\sigma$.

De onde $\alpha\theta$ está para $\alpha\sigma$ assim como o [quadrado] sobre $\mu\sigma$ está para [a soma] dos [quadrados] sobre $\pi\sigma$ e $\xi\sigma$.

Então a razão do [quadrado] sobre $\mu\sigma$ para [a soma] dos quadrados sobre $\xi\sigma$ e

---

[66]Ver *Sobre Conoides e Esferoides*, Proposição 11, [Mug70, pág. 182].

[67]Ver a dedução geométrica destas proporções na Seção A.3 do Apêndice A.

[68]Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 4, citada na Subseção 9.3.1, página 68 deste trabalho, ver ainda [Euc56a, Volume 2, pág. 200] e [Euc09, pág. 235]. Nesta Proposição Euclides determina a proporcionalidade entre os lados de triângulos semelhantes.

[69]Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 4, citada na Subseção 9.3.1, página 68 deste trabalho, ver ainda [Euc56a, pág. 200] e [Euc09, pág. 235].

[70]Neste parágrafo Arquimedes estabelece a equação de uma elipse com semi-eixos $\alpha\kappa = a$, $\beta\kappa = b$ em um sistema de eixos cartesianos centrados no ponto $\alpha$. Ver a dedução desta equação da elipse na Subseção 9.3.2, Equação (9.23).

[71]Esta denominação é de época posterior a Arquimedes e, portanto, acrescentada nas cópias da idade média, mas é útil para reconhecer os semi-eixos da elipse.

[72]Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 4, citada na Subseção 9.3.1, página 68 deste trabalho, ver ainda [Euc56a, pág. 200] e [Euc09, pág. 235], por semelhança entre os triângulos $\alpha\beta\kappa$ e $\alpha\pi\sigma$.

[73]Ver a dedução detalhada na Seção A.3 do Apêndice A.

[74]A saber, o retângulo de lados $\alpha\sigma$ e $\sigma\gamma$.

[75]Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro V, Proposição 15, citada na Nota de Rodapé 48, página 151 deste trabalho, e *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 4, citada na Subseção 9.3.1, página 68 deste trabalho.

[76]Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro V, Proposição 9, citada na Nota de Rodapé 31, página 148 deste trabalho, ver ainda [Euc56a, pág. 153] e [Euc09, pág. 216]. Ver a dedução completa na Seção A.3 do Apêndice A.

$\pi\sigma$ é igual[77] [à razão] do círculo de diâmetro $\mu\nu$ no cilindro, para a soma dos dois círculos de diâmetros $\xi o$ e $\pi\rho$. Assim o círculo de diâmetro $\mu\nu$, permanecendo no seu lugar, equilibrará em torno do ponto $\alpha$, a soma dos dois círculos de diâmetros $\xi o$ e $\pi\rho$, deslocados e colocados no ponto $\theta$ da alavanca, de modo que $\theta$ seja o centro de gravidade de cada um deles. A soma dos dois círculos cujos diâmetros são $\xi o$ e $\pi\rho$, assim deslocados, [terá como] centro de gravidade [o ponto] $\theta$. Então desta maneira a razão de $\alpha\theta$ para $\alpha\sigma$ é a mesma que a razão do círculo de diâmetro $\mu\nu$ para a soma dos dois círculos de diâmetros $\xi o$ e $\pi\rho$.

Da mesma maneira será demonstrado que, se for traçada no paralelogramo $\zeta\lambda$ uma outra paralela qualquer a $\varepsilon\zeta$ e a partir desta for levantado um plano perpendicular a $\alpha\gamma$, o círculo determinado no cilindro, permanecendo no seu lugar, equilibrará em torno do [ponto] $\alpha$, a soma de dois círculos, um determinado no elipsoide e o outro no cone, deslocados para o ponto $\theta$ da alavanca de modo que $\theta$ seja o centro de gravidade de cada um deles.

O cilindro, o elipsoide e o cone sendo preenchidos pelos círculos assim considerados, o cilindro, permanecendo no seu lugar, estará em equilíbrio em torno do ponto $\alpha$, com o elipsoide e o cone deslocados e colocados na alavanca em $\theta$, de modo que $\theta$ seja o centro de gravidade de cada um deles.

O centro de gravidade do cilindro[78] é [o ponto] $\kappa$. O centro de gravidade do elipsoide e o cone juntos, como foi dito [é o ponto] $\theta$. Então $\alpha\theta$ está para $\alpha\kappa$ como o cilindro [está] para a soma do elipsoide e do cone.

Mas $\alpha\theta$ [é] o dobro de $\alpha\kappa$. Portanto, também o cilindro é o dobro da soma do elipsoide e do cone. E também o cilindro é equivalente a dois cones e dois elipsoides. Ora, um cilindro é equivalente a três desses cones.[79] Portanto, três cones são equivalentes a dois cones e dois elipsoides. Sejam subtraídos os dois cones comuns. Então o cone restante, aquele que tem como triângulo [passando] pelo eixo o triângulo $\alpha\varepsilon\zeta$, é equivalente a dois elipsoides.

Mas um destes cones é [equivalente] a oito cones que têm como triângulo passando pelo eixo, [o triângulo] $\alpha\beta\delta$. Portanto, oito dos ditos cones são equivalentes a dois elipsoides. Então quatro cones são equivalentes a um elipsoide. Por conseguinte, o elipsoide é o quádruplo do cone que tem como vértice o ponto $\alpha$ e como base o círculo de diâmetro $\beta\delta$, perpendicular a $\alpha\gamma$, e a metade do elipsoide é o dobro do dito cone.

Sejam traçadas pelos pontos $\beta$ e $\delta$, no paralelogramo $\zeta\lambda$, as [retas] $\phi\chi$ e $\psi\omega$ paralelas a $\alpha\gamma$ e imagine-se um cilindro [tendo como] bases os círculos de diâmetro $\phi\psi$ e $\chi\omega$ e como eixo a reta $\alpha\gamma$.

Portanto, posto que o cilindro que tem como paralelogramo passando pelo eixo [o paralelogramo] $\phi\omega$ é o dobro[80] do cilindro que tem como paralelogramo passando pelo eixo [o paralelogramo] $\phi\delta$, pois suas bases são iguais e o eixo de um

[77] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XII, Proposição 2, citada na Seção 10.8, ver ainda [Euc56a, pág. 371] e [Euc09, pág. 528].

[78] Ver o Lema 8.

[79] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XII, Proposição 10, citada na Seção 10.4, página 94 deste trabalho, ver ainda [Euc56a, pág. 400] e [Euc09, pág. 543].

[80] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XII, Proposição 13, citada na Seção 10.4, ver ainda [Euc56a, pág. 417] e [Euc09, pág. 553].

é o dobro do eixo do outro, [e posto que] o cilindro que tem como paralelogramo passando pelo eixo [o paralelogramo] $\phi\delta$ é o triplo[81] do cone que tem como vértice o ponto $\alpha$ e como base o círculo de diâmetro $\beta\delta$ perpendicular a $\alpha\gamma$, então o cilindro que tem como paralelogramo passando pelo eixo [o paralelogramo] $\phi\omega$ é seis vezes o dito cone.

Mas foi demonstrado que o elipsoide é o quádruplo deste mesmo cone. Consequentemente, o cilindro é uma vez e meia o elipsoide.

## 11.6 Teorema IV: Volume de um Segmento de Paraboloide de Revolução

*Todo segmento de paraboloide*[82] *cortado por um plano perpendicular ao eixo é [equivalente] a uma vez e meia o cone que tem a mesma base e o mesmo eixo que o segmento.*[83]

Assim analisa-se isto por este método:

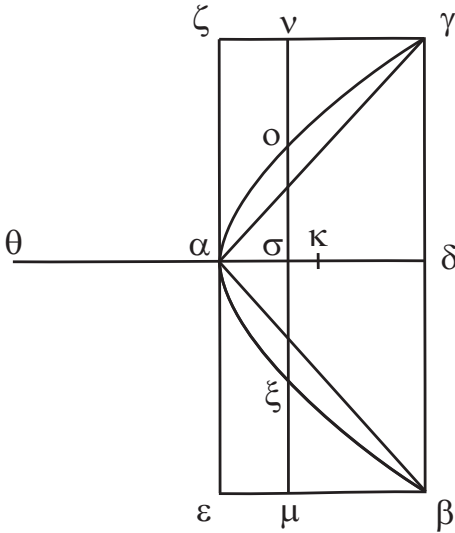



Figura 11.4: Figura do Teorema IV.

Seja, com efeito, um paraboloide e seja ele cortado com um plano passando pelo eixo. Seja a parábola $\alpha\beta\gamma$ a interseção [deste plano] com a superfície [do paraboloide]. Seja também cortado [o paraboloide] por um segundo plano perpendicular ao eixo e seja [a reta] $\beta\gamma$ a interseção comum aos dois [planos].

[81] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XII, Proposição 10, citada na Seção 10.4, página 94 deste trabalho, ver ainda [Euc56a, pág. 400] e [Euc09, pág. 543].

[82] O termo usado por Arquimedes para designar um paraboloide de revolução é *conoide reto*.

[83] Ver a demonstração geométrica deste teorema em *Sobre Conoides e Esferoides*, Proposição 21, [Mug70, pág. 202].

Seja $\alpha\delta$ o eixo do segmento [de paraboloide]. Prolongue-se $\alpha\delta$ até [o ponto] $\theta$ e seja $\alpha\theta$ igual à mesma [$\alpha\delta$]. Imagine-se $\delta\theta$ como uma alavanca cujo ponto $\alpha$ seja o meio.[84]

Seja a base do segmento [do paraboloide] o círculo de diâmetro $\beta\gamma$ perpendicular a $\alpha\delta$. Imagine-se o cone tendo por base o círculo de diâmetro $\beta\gamma$ e como vértice o ponto $\alpha$. Seja também um cilindro tendo como base o círculo de diâmetro $\beta\gamma$ e como eixo [a reta] $\alpha\delta$.

Seja traçada no paralelogramo [$\varepsilon\beta\gamma\zeta$] uma [reta] qualquer $\mu\nu$ sendo paralela a $\beta\gamma$ e levante-se sobre $\mu\nu$ um plano perpendicular a $\alpha\delta$. A interseção deste [plano] no cilindro será um círculo de diâmetro $\mu\nu$, e no segmento de paraboloide será um círculo de diâmetro $\xi o$.

E como $\alpha\beta\gamma$ é uma parábola de diâmetro $\alpha\delta$ e [as retas] $\xi\sigma$ e $\beta\delta$ são traçadas ordenadamente,[85] $\alpha\delta$ está para $\alpha\sigma$ assim como[86] [o quadrado] sobre $\beta\delta$ está para [o quadrado] sobre $\xi\sigma$. Mas $\alpha\delta$ é igual a $\alpha\theta$. Portanto, $\alpha\theta$ está para $\alpha\sigma$ assim como [o quadrado] sobre $\mu\sigma$ está para [o quadrado] sobre $\xi\sigma$.

Ora, o [quadrado] sobre $\mu\sigma$ está para o [quadrado] sobre $\xi\sigma$ assim como[87] o círculo de diâmetro $\mu\nu$ no cilindro está para o círculo de diâmetro $\xi o$ no segmento do paraboloide. Então $\alpha\theta$ está para $\alpha\sigma$ assim como o círculo de diâmetro $\mu\nu$ está para o círculo de diâmetro $\xi o$. Portanto, o círculo de diâmetro $\mu\nu$ no cilindro, permanecendo no seu lugar, equilibra em torno do ponto $\alpha$, o círculo de diâmetro $\xi o$ transportado e colocado na alavanca em $\theta$ de modo que o seu centro de gravidade seja [o ponto] $\theta$.

O centro de gravidade do círculo de diâmetro $\mu\nu$, é[88] [o ponto] $\sigma$, enquanto que o centro de gravidade do círculo de diâmetro $\xi o$ [que foi] deslocado, é [o ponto] $\theta$. [E os segmentos] $\alpha\theta$ e $\alpha\sigma$ possuem a razão inversa [daquela razão] entre o círculo de diâmetro $\mu\nu$ e o círculo de diâmetro $\xi o$.

Será demonstrado da mesma maneira que se no paralelogramo[89] $\gamma\varepsilon$ for traçada uma outra paralela qualquer a $\beta\gamma$ e se for levantado sobre ela um plano perpendicular a $\alpha\theta$, o círculo definido no cilindro, permanecendo no seu lugar, equilibrará o círculo definido no segmento do paraboloide, deslocado sobre a alavanca para o [ponto] $\theta$ de modo que o seu centro de gravidade seja $\theta$.

Então, assim preenchidos o cilindro e o segmento de paraboloide [pelos ditos círculos], o cilindro, permanecendo em seu lugar equilibrará em torno do ponto $\alpha$, o segmento de paraboloide transportado e colocado na alavanca em $\theta$ de modo que o seu centro de gravidade seja $\theta$.

Mas como as ditas grandezas se equilibram em torno do ponto $\alpha$ e o centro de gravidade do cilindro é o ponto $\kappa$, sendo o [segmento de reta] $\alpha\delta$ dividido ao

[84] Novamente este ponto $\alpha$ será considerado o fulcro da alavanca.

[85] As retas são traçadas *ordenadamente* ou *de maneira ordenada*. Ver a definição de *ordenada* na Seção 9.2.

[86] Ver a *Quadratura da Parábola*, Proposição 3, [Mug71a, pág. 167], ver também a Equação (9.10).

[87] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XII, Proposição 2, citada na Seção 10.8, ver ainda [Euc56a, pág. 371] e [Euc09, pág. 528].

[88] Ver o Lema 7.

[89] Neste caso trata-se do retângulo $\varepsilon\zeta\gamma\beta$.

meio pelo ponto $\kappa$,[90] e [como, finalmente,] o centro de gravidade do segmento transportado é $\theta$, a razão de $\alpha\theta$ para $\alpha\kappa$ será inversa à razão do cilindro para o segmento [de paraboloide]. Mas $\alpha\theta$ é o dobro de $\alpha\kappa$. Então também o cilindro é o dobro do segmento [de paraboloide].

Porém o próprio cilindro é o triplo do cone que tem como base o círculo de diâmetro $\beta\gamma$ e como vértice o ponto $\alpha$. Portanto, é claro que o segmento [de paraboloide] é uma vez e meia este mesmo cone.

## 11.7 Teorema V: Centro de Gravidade de um Segmento de Paraboloide de Revolução

*O centro de gravidade do segmento de paraboloide cortado por um plano perpendicular ao eixo está sobre a reta que é o eixo do segmento, sendo dividida [esta] reta de modo que a parte da mesma do lado do vértice é o dobro da parte restante.*

Assim analisa-se pelo método:

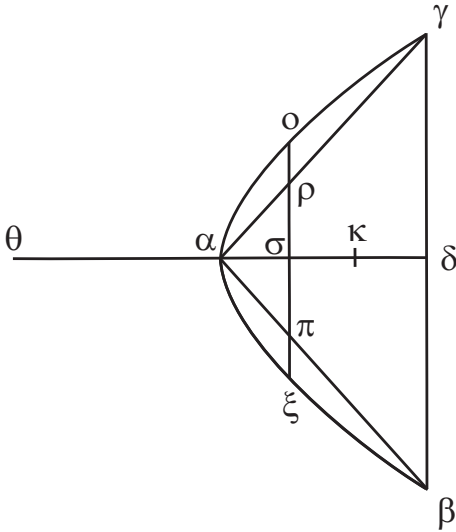



Figura 11.5: Figura do Teorema V.

Seja um segmento de paraboloide cortado por um plano perpendicular ao eixo. Corte-se [o paraboloide] com um segundo plano passando pelo eixo e que faça interseção na superfície [do paraboloide] segundo a parábola $\alpha\beta\gamma$.

Seja $\beta\gamma$ a interseção comum do plano que cortou o segmento [do paraboloide] e do plano secante. Seja a reta $\alpha\delta$ o eixo do segmento [do paraboloide] e também

[90]Ver o Lema 8.

o diâmetro da parábola $\alpha\beta\gamma$. Seja traçada $\alpha\theta$ no prolongamento da [reta] $\alpha\delta$ e igual a ela. Imagine-se $\delta\theta$ como uma alavanca da qual $\alpha$ é o meio.[91]

Seja também inscrito no segmento [de paraboloide] um cone de lados[92] $\alpha\beta$ e $\alpha\gamma$. Seja traçada na parábola uma [reta] qualquer $\xi o$ paralela a $\beta\gamma$, a qual corte a parábola [nos pontos] $\xi$ e $o$, [cortando ainda] os lados do cone nos pontos $\pi$ e $\rho$.

Mas[93] como [as retas] $\xi\sigma$ e $\beta\delta$ são traçadas em uma parábola perpendiculares ao diâmetro, a razão $\alpha\delta$ para $\alpha\sigma$ é igual[94] à razão entre o [quadrado] sobre $\beta\delta$ e o [quadrado] sobre $\xi\sigma$.

Ora, $\alpha\delta$ está para $\alpha\sigma$ assim como[95] $\beta\delta$ está para $\pi\sigma$, e $\beta\delta$ está para $\pi\sigma$ assim como o [quadrado] sobre $\beta\delta$ está para o [retângulo de lados] $\beta\delta$ e $\pi\sigma$. Portanto, também o [quadrado] sobre $\beta\delta$ estará para o [quadrado] sobre $\xi\sigma$ assim como o [quadrado] sobre $\beta\delta$ está para o [retângulo de lados] $\beta\delta$ e $\pi\sigma$. Então o [quadrado] sobre $\xi\sigma$ é equivalente[96] ao [retângulo de lados] $\beta\delta$ e $\pi\sigma$.

Portanto, [os segmentos de reta] $\beta\delta$, $\xi\sigma$ e $\pi\sigma$ são proporcionais[97] e, por isso, a razão entre $\beta\delta$ e $\pi\sigma$ é igual à razão entre o [quadrado] sobre $\xi\sigma$ e o [quadrado] sobre $\pi\sigma$. Mas $\beta\delta$ está para $\pi\sigma$ assim como $\alpha\delta$ está para $\alpha\sigma$, isto é, assim como $\alpha\theta$ está para $\alpha\sigma$. Então $\alpha\theta$ está para $\alpha\sigma$ assim como o [quadrado] sobre $\xi\sigma$ está para o [quadrado] sobre $\pi\sigma$.

Seja levantado agora sobre $\xi o$ um plano perpendicular a $\alpha\delta$. Este [plano] determinará no segmento de paraboloide, um círculo de diâmetro $\xi o$, e no cone um círculo de diâmetro $\pi\rho$. E posto que $\alpha\theta$ está para $\alpha\sigma$ assim como o [quadrado] sobre $\xi\sigma$ está para o [quadrado] sobre $\pi\sigma$ e [posto que o quadrado] sobre $\xi\sigma$ está para o [quadrado] sobre $\pi\sigma$ assim como[98] o círculo de diâmetro $\xi o$ está para o círculo de diâmetro $\pi\rho$, assim $\alpha\theta$ está para $\alpha\sigma$ assim como o círculo de diâmetro $\xi o$ está para o círculo de diâmetro $\pi\rho$.

Portanto, o círculo de diâmetro $\xi o$, permanecendo no seu lugar, equilibrará em torno do ponto $\alpha$, o círculo de diâmetro $\pi\rho$, transportado sobre a alavanca para o ponto $\theta$ de modo que $\theta$ seja o seu centro de gravidade.

Posto que o [ponto] $\sigma$ é o centro de gravidade[99] do círculo de diâmetro $\xi o$, permanecendo no seu lugar, e o [ponto] $\theta$ é o centro de gravidade do círculo de diâmetro $\pi\rho$ deslocado como foi dito, e [como] a razão entre $\alpha\theta$ e $\alpha\sigma$ é o inverso da razão entre o círculo de diâmetro $\xi o$ e o círculo de diâmetro $\pi\rho$, [estes círculos] se equilibrarão em relação ao ponto $\alpha$.

---

[91] Novamente este ponto $\alpha$ será considerado como fulcro da alavanca.

[92] Como já foi observado, os *lados* são as *geratrizes* do cone.

[93] A dedução matemática deste Teorema encontra-se na Seção A.5 do Apêndice A.

[94] Ver a *Quadratura da Parábola*, Proposição 3, [Mug71a, pág. 137]. Ver também a Equação (9.10).

[95] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 4, citada na Subseção 9.3.1, página 68 deste trabalho, ver ainda [Euc56a, pág. 200] e [Euc09, pág. 235].

[96] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro V, Proposição 9, citada na Nota de Rodapé 31, página 148 deste trabalho, ver ainda [Euc56a, pág. 153] e [Euc09, pág. 216].

[97] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 17, citada na Seção 10.6, ver ainda [Euc56a, pág. 228] e [Euc09, pág. 248].

[98] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XII, Proposição 2, citada na Seção 10.8, ver ainda [Euc56a, pág. 371] e [Euc09, pág. 528].

[99] Ver o Lema 7.

Demonstrar-se-á da mesma maneira que, se for traçada na parábola uma outra [reta] qualquer paralela a $\beta\gamma$ e sobre ela for levantado um plano perpendicular a $\alpha\delta$, o círculo determinado no segmento de paraboloide, permanecendo no seu lugar, equilibrará em torno do ponto $\alpha$, o círculo determinado no cone, transportado e colocado no ponto $\theta$ da alavanca, de modo que o seu centro de gravidade seja $\theta$.

Sendo então preenchidos com os círculos tanto o segmento [de paraboloide] quanto o cone, todos os círculos colocados no segmento, permanecendo nos seus lugares, equilibrarão todos os círculos no cone transportados e colocados no ponto $\theta$ da alavanca, de modo que o seu centro de gravidade seja $\theta$.

Por conseguinte, o segmento [de paraboloide] permanecendo no seu lugar, equilibrará em relação ao ponto $\alpha$ o cone transportado e colocado no ponto $\theta$ da alavanca, de modo que o seu centro de gravidade seja $\theta$.

Então, como o centro de gravidade das duas grandezas, consideradas como uma [só], é o ponto $\alpha$, e como $\theta$ é o centro de gravidade do próprio cone deslocado, então o centro de gravidade da grandeza restante [está] sobre a reta $\alpha\theta$ prolongada do lado de $\alpha$, destacando da mesma [o segmento] $\alpha\kappa$ de tal tamanho que a razão entre $\alpha\theta$ e o próprio [$\alpha\kappa$] seja igual[100] à razão entre o segmento [de paraboloide] e o cone.

Mas o segmento [de paraboloide] é uma vez e meia o cone.[101] Então também $\alpha\theta$ é uma vez e meia $\alpha\kappa$ e o centro de gravidade $\kappa$ [do segmento] de paraboloide está [situado em um ponto] que divide $\alpha\delta$ de tal maneira que a parte da mesma [reta situada] ao lado do vértice é o dobro da parte restante.

## 11.8 Teorema VI: Centro de Gravidade de um Hemisfério

*O centro de gravidade de todo hemisfério está sobre a reta que é o seu eixo, dividindo-a de tal maneira que a razão entre o segmento da mesma [reta] do lado da superfície e o segmento restante é de cinco para três.*

Seja uma esfera e seja ela cortada por um plano [passando] pelo centro. Seja o círculo $\alpha\beta\gamma\delta$ a interseção [do plano] com a superfície e sejam $\alpha\gamma$ e $\beta\delta$ dois diâmetros respectivamente perpendiculares. Seja elevado sobre $\beta\delta$ um plano perpendicular a $\alpha\gamma$. Seja um cone tendo por base o círculo de diâmetro $\beta\delta$ e por vértice o ponto $\alpha$. Sejam $\alpha\beta$ e $\alpha\delta$ os [seus] lados.[102]

Seja prolongada $\alpha\gamma$ e seja feito [o segmento de reta] $\alpha\theta$ igual a $\alpha\gamma$. Imagine-se que $\gamma\theta$ seja uma alavanca cujo meio seja [o ponto] $\alpha$.[103] Seja traçada no semicírculo $\alpha\beta\delta$ uma [reta] qualquer $\xi o$ paralela a $\beta\delta$, e ela corte a circunferência do semicírculo nos [pontos] $\xi$ e $o$, os lados do cone nos pontos $\pi$ e $\rho$, e a [reta] $\alpha\gamma$ em $\varepsilon$.

[100] Ver o Lema 2.
[101] Ver o Teorema IV.
[102] Isto é, as geratrizes.
[103] Este ponto $\alpha$ será considerado o fulcro da alavanca.

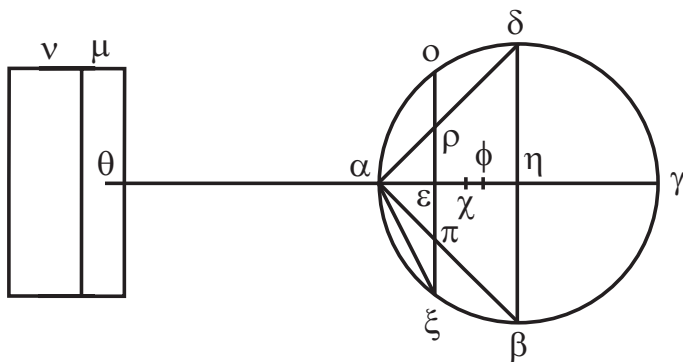



Figura 11.6: Figura do Teorema VI.

Levante-se também sobre $\xi o$ um plano perpendicular a $\alpha\varepsilon$. Este [plano] fará interseção no hemisfério segundo um círculo de diâmetro $\xi o$ e no cone segundo um círculo de diâmetro $\pi\rho$.

E como [a razão] entre $\alpha\gamma$ e $\alpha\varepsilon$ [é igual à razão] entre[104] o [quadrado] sobre $\alpha\xi$ e o [quadrado] sobre $\alpha\varepsilon$, e como o [quadrado] sobre $\alpha\xi$ é equivalente à soma dos [quadrados][105] sobre $\alpha\varepsilon$ e $\varepsilon\xi$, e [sendo] $\varepsilon\pi$ igual[106] a $\alpha\varepsilon$, assim [a razão] entre $\alpha\gamma$ e $\alpha\varepsilon$ é igual [à razão] da soma dos [quadrados] sobre $\varepsilon\xi$ e $\varepsilon\pi$ para o [quadrado] sobre $\varepsilon\pi$.

Mas a soma dos [quadrados] sobre $\varepsilon\xi$ e $\varepsilon\pi$ está para o [quadrado] sobre $\varepsilon\pi$ assim como [a soma] do círculo de diâmetro $\xi o$ e do círculo de diâmetro $\pi\rho$ [está] para o círculo de diâmetro $\pi\rho$. Também $\alpha\gamma$ é igual a $\alpha\theta$. Portanto, $\alpha\theta$ [está] para $\alpha\varepsilon$ assim como [a soma] do círculo de diâmetro $\xi o$ e do círculo de diâmetro $\pi\rho$ [está] para o círculo de diâmetro $\pi\rho$.

Então a soma dos dois círculos de diâmetros $\xi o$ e $\pi\rho$, permanecendo nos seus lugares, equilibrará em torno do ponto $\alpha$, o círculo de diâmetro $\pi\rho$ deslocado e colocado [no ponto] $\theta$, de modo que $\theta$ seja o seu centro de gravidade.

Posto que [o ponto] $\varepsilon$ é o centro de gravidade[107] da soma dos dois círculos de diâmetros $\xi o$ e $\pi\rho$, permanecendo nos seus lugares, enquanto que $\theta$ é [o centro de gravidade] do círculo de diâmetro $\pi\rho$ deslocado, $\alpha\varepsilon$ está para $\alpha\theta$ assim como o círculo de diâmetro $\pi\rho$ está para a soma dos círculos de diâmetros $\xi o$ e $\pi\rho$.

Da mesma maneira, se for traçada no semicírculo[108] uma outra paralela qualquer a $\beta\eta\delta$ e a partir dela for levantado um plano perpendicular a $\alpha\gamma$, a soma dos dois círculos, aquele determinado no hemisfério e aquele no cone,

[104] Ver a Seção A.6 do Apêndice A e o Apêndice C.

[105] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro I, Proposição 47, citada na Nota de Rodapé 47, página 151 deste trabalho, ver ainda [Euc56a, Volume 1, pág. 359] e [Euc09, pág. 132]. Esta Proposição de Euclides corresponde à demonstração do teorema de Pitágoras.

[106] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 4, citada na Subseção 9.3.1, página 68 deste trabalho, ver ainda [Euc56a, pág. 200] e [Euc09, pág. 235].

[107] Ver o Lema 7.

[108] O texto grego aqui diz "parábola" e assim aparece em algumas traduções em outras línguas. Trata-se evidentemente de um erro de cópia pois neste teorema não existem parábolas.

permanecendo nos seus lugares, equilibrará em torno do ponto $\alpha$, o círculo determinado no cone deslocado e colocado na alavanca [no ponto] $\theta$.

Então o hemisfério e o cone, [sendo] preenchidos pelos círculos, todos os círculos no hemisfério e no cone, permanecendo nos seus lugares, equilibrarão em torno do ponto $\alpha$ todos os círculos no cone transportados e colocados no ponto $\theta$ da alavanca, de modo que o seu centro de gravidade seja $\theta$. Por conseguinte, o hemisfério e o cone, permanecendo nos seus lugares, equilibrarão em torno do ponto $\alpha$ o cone transportado e colocado no ponto $\theta$ da alavanca, de modo que o seu centro de gravidade seja $\theta$.

[Seja agora[109] um cilindro $\mu\nu$ suspenso no ponto $\theta$, equivalente ao cone $\alpha\beta\delta$. Corte-se esse cilindro com um plano perpendicular ao eixo de modo que o cilindro $\mu$[110] se equilibre com o cone em torno do ponto $\alpha$. Então a parte restante, isto é, o cilindro $\nu$, equilibrará o hemisfério.

Tome-se então sobre $\alpha\eta$ um ponto $\phi$ tal que $\alpha\phi$ seja o triplo de $\eta\phi$. O ponto $\phi$ será, portanto, o centro de gravidade do cone.[111] Tome-se também um ponto $\chi$ tal que a razão entre $\alpha\eta$ e $\alpha\chi$ seja de oito para cinco. Posto que o cilindro $\mu$ equilibra o cone $\alpha\beta\delta$ em torno do ponto $\alpha$, a razão entre o cilindro $\mu$ e o cone $\alpha\beta\delta$ será igual à razão entre $\alpha\phi$ e $\alpha\theta$, isto é, de três para oito.[112]

Mas o cone $\alpha\beta\delta$ é equivalente ao cilindro $\mu\nu$. Portanto, o cilindro $\mu\nu$ está para o cilindro $\mu$ assim como oito está para três. Por conseguinte, o cilindro $\nu$ está para o cilindro $\mu\nu$ assim como cinco está para oito[113] e o cone $\alpha\beta\delta$ está para o cilindro $\nu$ assim como oito está para cinco, isto é, como $\alpha\eta$ está para $\alpha\chi$. E como a esfera é equivalente ao quádruplo[114] do cone cuja base é o círculo de diâmetro $\beta\delta$ e cujo eixo é $\alpha\eta$, então a razão do hemisfério para o cone $\alpha\beta\delta$ será igual a dois para um, isto é, a $\alpha\theta$ para $\alpha\eta$. Portanto, a razão entre o hemisfério e o cilindro $\nu$ é igual à razão entre $\alpha\theta$ e $\alpha\chi$.

Então o cilindro $\nu$ cujo centro de gravidade é $\theta$, equilibra o hemisfério em relação ao ponto $\alpha$. Por conseguinte, o centro de gravidade do hemisfério é o ponto $\chi$ que divide o eixo de modo que a parte situada do lado da superfície do hemisfério tenha uma razão de cinco para três com a parte restante.]

## 11.9 Teorema VII: Volume de um Segmento Esférico

Com este método demonstra-se também que

*a razão entre todo segmento esférico e o cone que tem a mesma base e o*

[109] O texto grego a partir deste ponto apresenta uma lacuna quase completa. A reconstituição foi feita por Heiberg a partir da Figura 10.7 e do Teorema IX.
[110] Os cilindros $\mu$ e $\nu$ compõem o cilindro total $\mu\nu$.
[111] Ver o Lema 10.
[112] Ver a dedução detalhada destas relações na Seção 10.7.
[113] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro V, Proposição 17, [Euc09, pág. 222]: "Caso magnitudes, tendo sido compostas, estejam em proporção, também, tendo sido separadas, estarão em proporção."
[114] Ver o Teorema II.

*mesmo eixo do segmento, é igual à razão entre a soma do raio da esfera e a altura do segmento restante, para a altura do segmento restante.*[115]

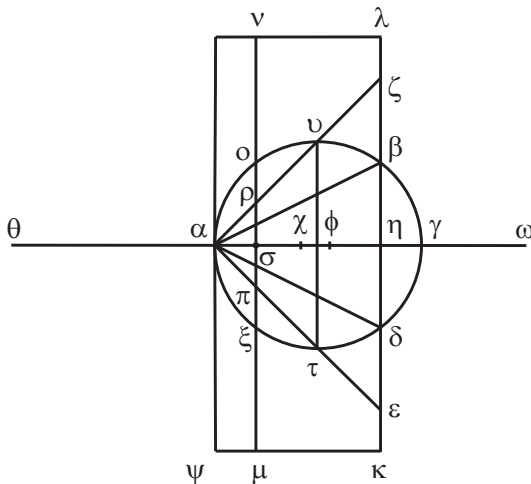



Figura 11.7: Figura do Teorema VII.

[Seja[116] com efeito uma esfera e $\alpha\beta\gamma\delta$ seu círculo máximo. Sejam $\alpha\gamma$ e $\tau\upsilon$ dois diâmetros perpendiculares. Corte-se a esfera por um plano perpendicular a $\alpha\gamma$ destacando um segmento tendo por base o círculo $\beta\delta$. Seja $\eta$ o ponto de interseção entre $\beta\delta$ e $\alpha\gamma$. Construa-se sobre o círculo de diâmetro $\beta\delta$ um cone de vértice $\alpha$.

Construa-se também sobre o círculo de diâmetro $\tau\upsilon$ um outro cone tendo o mesmo vértice e seja prolongada a sua superfície. Seja o círculo de diâmetro $\varepsilon\zeta$ a interseção deste cone com o plano traçado por $\beta\delta$ paralelo à base. Seja construído neste mesmo plano um círculo de diâmetro $\kappa\lambda$ tendo como centro o ponto $\eta$ e o raio igual a $\alpha\gamma$. Seja construído sobre este círculo, um cilindro com eixo $\alpha\eta$ tendo como paralelogramo passando pelo eixo $\psi\lambda$.[117]

Seja prolongada $\alpha\gamma$ dos dois lados: de um lado seja construído o prolongamento $\gamma\omega$[118] igual ao raio da esfera e do outro lado $\alpha\theta$ igual a $\alpha\gamma$. Imagine-se

[115] A demonstração geométrica deste teorema pode ser encontrada em *Sobre a Esfera e o Cilindro*, Livro II, Proposição 2, [Mug70, pág. 104].

[116] O texto grego do *Códice C* apresenta uma lacuna que devia conter a descrição da figura. A reconstituição foi feita por Heiberg a partir da própria Figura 11.7 e do Teorema II.

[117] Há evidentemente um erro de transcrição das letras usadas na Figura deste teorema pois a letra $\phi$ foi usada para indicar dois pontos distintos. Para evitar problemas de compreensão, indicaremos com a letra $\phi$ o ponto sobre o eixo comum, como está claramente no texto grego, enquanto que indicaremos com a letra $\psi$ um dos vértices do paralelogramo que acabou de ser definido.

[118] A posição do ponto $\omega$ não está indicada no lugar correspondente da Figura do texto grego. Optamos por representá-la no seu lugar correto, como da interpretação feita por Heiberg, que completou o desenvolvimento, pois está faltando no manuscrito grande parte desta demonstração.

$\gamma\theta$ como uma alavanca da qual $\alpha$ seja o ponto médio.[119]

Seja então traçada no paralelogramo $\kappa\lambda\psi$ a reta $\mu\nu$ paralela a $\beta\delta$] e eleve-se sobre $\mu\nu$ um plano perpendicular a $\alpha\gamma$. Este plano cortará o cilindro segundo um círculo de diâmetro $\mu\nu$, o segmento esférico segundo um círculo de diâmetro de diâmetro $\xi o$ e o cone que tem como base o círculo de diâmetro $\varepsilon\zeta$ e como vértice o ponto $\alpha$, segundo um círculo de diâmetro $\pi\rho$.

Da mesma maneira[120] será demonstrado como anteriormente que o círculo de diâmetro $\mu\nu$, permanecendo no seu lugar, equilibrará em torno do ponto $\alpha$, a soma dos dois círculos de diâmetros $\xi o$ e $\pi\rho$, deslocados na alavanca para [o ponto] $\theta$, de modo que $\theta$ seja o centro de gravidade de cada um deles. E assim igualmente para todos [os outros círculos].

Então [sendo] preenchidos com os círculos o cilindro, o cone e o segmento esférico, o cilindro permanecendo no seu lugar equilibrará a soma do cone e do segmento esférico, deslocados e colocados [no ponto] $\theta$ da alavanca.

Divida-se $\alpha\eta$ pelos pontos $\phi$ e $\chi$ de tal maneira que, por um lado, $\alpha\chi$ seja igual a $\eta\chi$ e, por outro lado, $\eta\phi$ seja um terço de $\alpha\eta$. Então $\chi$ será o centro de gravidade do cilindro[121] por ser o ponto médio do eixo $\alpha\eta$. Portanto, como as ditas grandezas se equilibram em torno do ponto $\alpha$, assim a [razão] entre o cilindro e a soma do cone com diâmetro de base $\varepsilon\zeta$ e do segmento esférico $\alpha\beta\delta$, será igual [à razão] entre $\alpha\theta$ e $\alpha\chi$.

E como $\alpha\eta$ é o triplo de $\eta\phi$, o [retângulo de lados] $\gamma\eta$ e $\eta\phi$ é equivalente a um terço do [retângulo de lados] $\alpha\eta$ e $\gamma\eta$. Ora, o [retângulo de lados] $\alpha\eta$ e $\gamma\eta$ é equivalente[122] ao [quadrado] sobre $\beta\eta$. Então, também o [retângulo de lados] $\gamma\eta$ e $\eta\phi$ será um terço do [quadrado sobre] $\beta\eta$.[123]

Por outro lado, o quadrado sobre $\alpha\eta$ é equivalente ao triplo[124] do retângulo de lados $\alpha\eta$ e $\eta\phi$, isto é, ao triplo do retângulo de lados $\alpha\chi$ e $\alpha\phi$, pois $\alpha\eta$ é o dobro de $\alpha\chi$ e $\alpha\phi$ é o dobro de $\eta\phi$. Além disso, como $\alpha\theta$ é igual a $\kappa\eta$ e como $\alpha\eta$ é igual a $\varepsilon\eta$, a razão do quadrado sobre $\alpha\theta$ para um terço do quadrado sobre $\alpha\eta$, será igual à razão do cilindro cuja base é o círculo de diâmetro $\kappa\lambda$ para o cone $\alpha\varepsilon\zeta$.

Mas a razão do quadrado sobre $\alpha\theta$ para um terço do quadrado sobre $\alpha\eta$ é igual à razão do quadrado sobre $\alpha\theta$ para o retângulo de lados $\alpha\chi$ e $\alpha\phi$. Por conseguinte, a razão do quadrado sobre $\alpha\theta$ para o retângulo de lados $\alpha\chi$ e $\alpha\phi$ é igual à razão entre o cilindro e o cone.

Mas foi também demonstrado que a razão entre o cilindro cuja base é o

---

[119] Novamente este ponto $\alpha$ será considerado o fulcro da alavanca.

[120] Ver a dedução matemática na Seção A.2 do Apêndice A.

[121] Ver o Lema 8.

[122] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 8, Corolário, citado na Subseção 9.3.1, página 67, ver ainda [Euc56a, Volume 2, pág. 211] e [Euc09, pág. 241].

[123] A partir deste ponto existem várias lacunas no texto grego que foram reconstituídas por Heiberg.

[124] Sendo

$$\alpha\eta = 3(\eta\phi) \ , \tag{11.3}$$

temos:

$$\alpha\eta \cdot \alpha\eta = 3(\eta\phi \cdot \alpha\eta) \ . \tag{11.4}$$

Ou seja, o quadrado de lado $\alpha\eta$ é o triplo do retângulo de lados $\eta\phi$ e $\alpha\eta$.

círculo de diâmetro $\kappa\lambda$ e a soma do segmento esférico $\alpha\beta\delta$ e do cone, é igual à razão entre $\alpha\theta$ e $\alpha\chi$. Mas $\alpha\theta$ é [igual a $\alpha\gamma$, ou seja, é igual à soma de $\alpha\phi$ e $\gamma\phi$. Portanto, a razão entre o quadrado sobre $\alpha\theta$ e a soma dos retângulos de lados $\alpha\phi$, $\alpha\chi$ e $\gamma\phi$, $\alpha\chi$ é igual à razão entre o cilindro e a soma do segmento esférico $\alpha\beta\delta$ e do cone $\alpha\varepsilon\zeta$. A razão entre o cilindro e o segmento esférico será, portanto, igual à razão entre o quadrado sobre $\alpha\theta$ e o retângulo de lados $\gamma\phi$ e $\alpha\chi$. Mas a razão entre o cilindro e o cone $\alpha\beta\delta$ é igual à razão entre o quadrado sobre $\alpha\theta$ e um terço do quadrado sobre $\beta\eta$ e esta última razão é igual à razão entre o quadrado sobre $\alpha\theta$ e o retângulo de lados $\gamma\eta$ e $\eta\phi$.

Portanto, a razão entre o segmento esférico $\alpha\beta\delta$ e o cone $\alpha\beta\delta$ é igual à razão entre o retângulo de lados $\gamma\phi$ e $\alpha\chi$, e o retângulo de lados $\gamma\eta$ e $\eta\phi$. E como $\alpha\eta$ é igual ao dobro de $\alpha\chi$, à soma de $\alpha\phi$ com $\eta\phi$ e ao triplo de $\eta\phi$, e como $\gamma\phi$ é igual à soma de $\eta\phi$ com $\gamma\eta$ e à soma de um terço de $\alpha\eta$ com $\gamma\eta$, o retângulo de lados $\gamma\phi$ e $\alpha\chi$ será equivalente à soma do retângulo que tem por lados um terço de $\alpha\eta$ e três meios de $\eta\phi$, com o retângulo cujos lados são $\gamma\eta$ e três meios de $\eta\phi$.

Sendo então esta última soma equivalente ao retângulo cujos lados são $\eta\phi$ e a soma de $\gamma\eta$ com a metade de $\alpha\gamma$ e, por conseguinte, sendo equivalente ao retângulo cujos lados são $\eta\phi$ e $\eta\omega$, a razão entre o segmento esférico $\alpha\beta\delta$ e o cone $\alpha\beta\delta$ é igual à razão entre $\eta\omega$ e $\gamma\eta$.][125]

## 11.10 Teorema VIII: Volume de um Segmento de Elipsoide de Revolução

De modo semelhante demonstra-se pelo mesmo método que:[126]

> *todo segmento de elipsoide cortado por um plano perpendicular [ao eixo] tem, em relação ao cone que tem a mesma base e o mesmo eixo que o segmento, a mesma razão que a soma da metade do eixo do elipsoide e do eixo do segmento oposto, [tem] para o eixo do segmento oposto.*[127]

## 11.11 Teorema IX: Centro de Gravidade de um Segmento Esférico

> *O centro de gravidade de todo segmento esférico está sobre o eixo do segmento, dividindo-o de tal maneira que a razão entre a parte do mesmo do lado do vértice do segmento, e a parte restante, é a mesma [razão] que a*

[125] Neste ponto Heiberg não conseguiu ler o restante do Teorema. A demonstração completa desse Teorema encontra-se na Seção 10.8 deste livro.

[126] Ou seja, o mesmo método mecânico pode ser aplicado para chegar ao resultado apresentado a seguir.

[127] Arquimedes não apresenta a demonstração deste teorema pelo seu método, por considerar que seria equivalente à demonstração do teorema anterior. Contudo, uma demonstração geométrica foi desenvolvida por ele próprio em outro livro. Ver *Sobre Conoides e Esferoides*, Proposições 29 e 31, [Mug70, págs. 235 e 244].

*soma do eixo do segmento e o quádruplo do eixo do segmento oposto, com a soma do eixo do segmento e o dobro do eixo do segmento oposto.*

[Seja[128] uma esfera. Corte-se a esfera por um plano perpendicular ao eixo. Seja $\alpha\beta\delta$ o segmento esférico determinado.

Seja o círculo $\alpha\beta\gamma\delta$] a interseção determinada por um outro plano perpendicular passando pelo centro. Seja $\beta\delta$ a interseção deste plano com o plano que determinou o segmento [esférico]. Seja a reta $\alpha\gamma$, o diâmetro perpendicular a $\beta\delta$ e cortada pelo ponto $\eta$, de modo que $\alpha\eta$ seja o eixo do segmento [esférico] cujo vértice é o ponto $\alpha$, enquanto que o eixo do segmento [esférico] oposto é $\gamma\eta$.

Corte-se $\alpha\eta$ pelo ponto $\chi$ de modo que $\alpha\chi$ esteja para $\eta\chi$ assim como $\alpha\eta$ e o quádruplo de $\gamma\eta$ estão para $\alpha\eta$ e o dobro de $\gamma\eta$.

*Digo que [o ponto] $\chi$ é o centro de gravidade do segmento [esférico] cujo vértice é o ponto $\alpha$*[129] ...

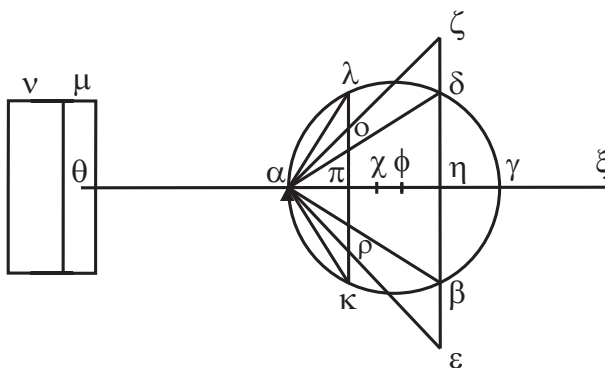



Figura 11.8: Figura do Teorema IX.

... [seja prolongada $\alpha\gamma$ dos dois lados] e seja feita de um lado $\alpha\theta$ igual a $\alpha\gamma$ e [do outro lado] $\gamma\xi$ igual ao raio da esfera. Imagine-se $\gamma\theta$ [como] uma alavanca cujo meio é [o ponto] $\alpha$.[130] Seja também descrito, no plano que corta o segmento [esférico], um círculo com centro em $\eta$ e com raio igual a $\alpha\eta$. Sobre este círculo seja construído um cone tendo por vértice o ponto $\alpha$, e sejam $\alpha\varepsilon$ e $\alpha\zeta$ os lados[131] do cone.

Seja traçada uma [reta] qualquer $\kappa\lambda$ paralela a $\varepsilon\zeta$, a qual encontre a superfície do segmento [esférico] em $\kappa$ e $\lambda$, os lados do cone $\alpha\varepsilon\zeta$ em $\rho$ e $o$, e a [reta] $\alpha\gamma$ em $\pi$.

[128] Três linhas sobre a construção da figura, faltantes no texto grego, foram reconstituídas por Heiberg.

[129] As cinco linhas seguintes contêm somente traços de palavras que Heiberg não conseguiu reconstituir.

[130] Este ponto $\alpha$ será considerado o fulcro da alavanca.

[131] Isto é, as geratrizes.

Então, sendo que $\alpha\gamma$ está para $\alpha\pi$ assim como[132] o [quadrado] sobre $\alpha\kappa$ está para o [quadrado] sobre $\alpha\pi$, sendo que o [quadrado] sobre $\alpha\kappa$ é equivalente à [soma dos quadrados] sobre $\alpha\pi$ e $\kappa\pi$, e [sendo que o quadrado] sobre $\alpha\pi$ é igual ao [quadrado] sobre $o\pi$, e também que o [quadrado] sobre $\alpha\eta$ é igual ao [quadrado] sobre $\varepsilon\eta$, assim [a razão entre] $\alpha\gamma$ e $\alpha\pi$ é igual à [razão entre a soma dos quadrados] sobre $\kappa\pi$ e $o\pi$ e o [quadrado] sobre $o\pi$.

Mas a [razão entre a soma dos quadrados] sobre $\kappa\pi$ e $o\pi$ e o [quadrado] sobre $o\pi$ é igual [à razão] do círculo de diâmetro $\kappa\lambda$ e do círculo de diâmetro $o\rho$, com o círculo de diâmetro $o\rho$, e também $\alpha\gamma$ é igual a $\alpha\theta$. Portanto, [a razão] entre $\alpha\theta$ e $\alpha\pi$ é igual [à razão] entre os círculos de diâmetro $\kappa\lambda$ e $o\rho$, e o círculo de diâmetro $o\rho$.

Posto que [a razão] entre os círculos de diâmetro $\kappa\lambda$ e $o\rho$ para o círculo de diâmetro $o\rho$, é igual [à razão] de $\alpha\theta$ para $\alpha\pi$, seja transportado o círculo de diâmetro $o\rho$ e colocado [no ponto] $\theta$ da alavanca de modo que $\theta$ seja o seu centro de gravidade. Portanto, $\alpha\theta$ está para $\alpha\pi$ assim como [a soma dos] círculos de diâmetro $\kappa\lambda$ e $o\rho$, permanecendo nos seus lugares, está para o círculo de diâmetro $o\rho$ deslocado e colocado no [ponto] $\theta$ da alavanca, de modo que $\theta$ seja o seu centro de gravidade.

Por conseguinte, os círculos [que estão] no segmento [esférico] $\alpha\beta\delta$ e no cone $\alpha\varepsilon\zeta$ equilibram o círculo [que está] no cone $\alpha\varepsilon\zeta$ em torno do [ponto] $\alpha$.

Assim também todos os círculos no segmento [esférico] $\alpha\beta\delta$ e no cone $\alpha\varepsilon\zeta$, permanecendo nos seus lugares, são equilibrados, em relação ao ponto $\alpha$, por todos os círculos no cone $\alpha\varepsilon\zeta$ deslocados e colocados no ponto $\theta$ da alavanca, de modo que $\theta$ seja o seu centro de gravidade.

Desta maneira também o segmento da esfera $\alpha\beta\delta$ e o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ permanecendo nos seus lugares, equilibram em torno do ponto $\alpha$, o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ deslocado e colocado no ponto $\theta$ da alavanca de modo que $\theta$ seja o seu centro de gravidade.

Seja agora um cilindro $\mu\nu$ equivalente ao cone que tem por base o círculo de diâmetro $\varepsilon\zeta$ e como vértice o ponto $\alpha$. Seja cortada [a reta] $\alpha\eta$ pelo [ponto] $\phi$ de tal maneira que $\alpha\eta$ seja o quádruplo de $\eta\phi$. Portanto, o ponto $\phi$ é o centro de gravidade do cone $\alpha\varepsilon\zeta$. Com efeito, isto foi assinalado anteriormente.[133]

Corte-se ainda o cilindro $\mu\nu$ por um plano perpendicular [ao eixo] de modo que o cilindro $\mu$ esteja em equilíbrio com o cone $\alpha\varepsilon\zeta$. Então [posto que] o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ e o segmento [esférico] $\alpha\beta\delta$ permanecendo nos seus lugares, estão em equilíbrio com o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ deslocado e colocado no ponto no ponto $\theta$ da alavanca de modo que $\theta$ seja o seu centro de gravidade, que o cilindro $\mu\nu$ é equivalente ao cone $\alpha\varepsilon\zeta$, que cada um dos dois cilindros $\mu$ e $\nu$ é colocado em $\theta$, e que o cilindro $\mu\nu$ equilibra os dois [isto é, o segmento esférico e o cone], então também o [cilindro] $\nu$ equilibra o segmento esférico em torno do ponto $\alpha$.

Por outro lado, o segmento esférico $\alpha\beta\delta$ está para o cone cuja base é o círculo $\beta\delta$ e cujo vértice o ponto $\alpha$, assim como $\eta\xi$ está para $\gamma\eta$, pois isto foi

[132] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 8, Corolário, citado na Subseção 9.3.1, página 67 deste trabalho, ver ainda [Euc56a, Volume 2, pág. 211] e [Euc09, pág. 241], ver também a Equação (A.82).

[133] Ver o Lema 10.

demonstrado anteriormente.[134]

Mas [a razão] entre o cone $\alpha\beta\delta$ e o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ é igual[135] à [razão] entre o círculo de diâmetro $\beta\delta$ e o círculo de diâmetro $\varepsilon\zeta$, e a [razão] do círculo para o círculo é igual à [razão] do [quadrado] sobre $\beta\eta$ para o [quadrado] sobre $\varepsilon\eta$. E também o [quadrado] sobre $\beta\eta$ é equivalente ao [retângulo de lados] $\gamma\eta$ e $\alpha\eta$. E o [quadrado] sobre $\varepsilon\eta$ é equivalente ao [quadrado] sobre $\alpha\eta$, e [a razão] entre o [retângulo de lados] $\gamma\eta$ e $\alpha\eta$ e o [quadrado] sobre $\alpha\eta$, é igual [à razão] entre $\gamma\eta$ e $\alpha\eta$. Por conseguinte, o cone $\alpha\beta\delta$ está para o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ assim como $\gamma\eta$ está para $\alpha\eta$.

Mas foi também mostrado que o cone $\alpha\beta\delta$ está para o segmento [esférico] $\alpha\beta\delta$ assim como $\gamma\eta$ está para $\eta\xi$. Então, por identidade[136] o segmento [esférico] $\alpha\beta\delta$ [está] para o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ assim como $\eta\xi$ está para $\alpha\eta$. E como [a razão] entre $\alpha\chi$ e $\eta\chi$ é igual à [razão] entre [a soma] de $\alpha\eta$ com o quádruplo de $\gamma\eta$ e [a soma] de $\alpha\eta$ com o dobro de $\gamma\eta$, *invertendo*,[137] $\eta\chi$ estará para $\alpha\chi$ assim como [a soma] do dobro de $\gamma\eta$ com $\alpha\eta$ está para [a soma] do quádruplo de $\gamma\eta$ com $\alpha\eta$.

*Componendo*,[138] [a razão] entre $\alpha\eta$ e $\alpha\chi$ é igual [à razão] entre [a soma] do sêxtuplo de $\gamma\eta$ com o dobro de $\alpha\eta$ e a soma de $\alpha\eta$ com o quádruplo de $\gamma\eta$. Além disso, $\eta\xi$ [é a quarta parte da soma] do sêxtuplo de $\gamma\eta$ com o dobro de $\alpha\eta$, e $\gamma\phi$ é a quarta parte [da soma] do quádruplo de $\gamma\eta$ com $\alpha\eta$, pois isto é evidente.[139] Então $\alpha\eta$ está para $\alpha\chi$ assim como[140] $\eta\xi$ está para $\gamma\phi$. Por conseguinte, também $\eta\xi$ está para $\alpha\eta$ assim como[141] $\gamma\phi$ está para $\alpha\chi$.

Mas foi mostrado também que [a razão] entre $\eta\xi$ e $\alpha\eta$ é igual [à razão] entre o segmento [esférico] cujo vértice é o ponto $\alpha$ e cuja base é o círculo de diâmetro $\beta\delta$, e o cone cujo vértice é o ponto $\alpha$ e cuja base é o círculo de diâmetro $\varepsilon\zeta$. Portanto, o segmento [esférico] $\alpha\beta\delta$ está para o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ assim como $\gamma\phi$ está para $\alpha\chi$.

E como o cilindro $\mu$ equilibra o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ em torno do ponto $\alpha$, e o centro de gravidade do cilindro é o [ponto] $\theta$ e o [centro de gravidade] do cone $\alpha\varepsilon\zeta$ é o [ponto] $\phi$, então o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ estará para o cilindro $\mu$ assim como $\alpha\theta$ está para $\alpha\phi$. Isto é, assim como $\alpha\gamma$ está para $\alpha\phi$.

Além disso, o cilindro $\mu\nu$ é equivalente ao cone $\alpha\varepsilon\zeta$. Portanto, *separando*,[142]

---

[134] Ver o Teorema VII.

[135] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XII, Proposição 11, citada na Seção 10.4, ver ainda [Euc56a, Volume 3, pág. 406] e [Euc09, pág. 546].

[136] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro V, Proposição 22, [Euc09, pág. 227]: "Caso existam magnitudes, em quantidade qualquer, e outras iguais a elas em quantidade, tomadas duas a duas e na mesma razão, também, por igual posto, estarão na mesma razão."

[137] Ver a Equação (8.21) e *Os Elementos* de Euclides, Livro V, Proposição 7, Corolário, [Euc09, pág. 213]: "Disso, então, é evidente que, caso algumas magnitudes estejam em proporção, também estarão inversamente em proporção. O que era preciso provar."

[138] Ver a Equação (8.22).

[139] Ver a dedução destas Equações na Seção 10.10, desde a Equação (10.113) até a Equação (10.126).

[140] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro V, Proposição 15, citada na Nota de Rodapé 48, página 151 deste trabalho, ver ainda [Euc56a, Volume 2, pág. 163] e [Euc09, pág. 220].

[141] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro V, Proposição 16, citada na Subseção 9.3.2, ver ainda [Euc56a, Volume 2, pág. 164] e [Euc09, pág. 221].

[142] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro V, Proposição 17, citada na Nota de Rodapé 113, página 162 deste trabalho, ver ainda [Euc56a, Volume 2, pág. 166] e [Euc09, pág. 222]. Ver

o cilindro $\mu\nu$ está para o cilindro $\nu$ assim como $\alpha\gamma$ está para $\gamma\phi$. Além disso, o cilindro $\mu\nu$ é equivalente ao cone $\alpha\varepsilon\zeta$. Portanto, o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ está para o cilindro $\nu$ assim como $\alpha\gamma$ está para $\gamma\phi$, isto é, assim como $\alpha\theta$ está para $\gamma\phi$. Mas também já foi demonstrado que o segmento [esférico] $\alpha\beta\delta$ está para o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ assim como $\gamma\phi$ está para $\alpha\chi$. Então, por identidade,[143] o segmento [esférico] $\alpha\beta\delta$ estará para o cilindro $\nu$ assim como $\alpha\theta$ está para $\alpha\chi$.

Também foi demonstrado que o segmento [esférico] $\alpha\beta\delta$ equilibra o cilindro $\nu$ em torno do ponto $\alpha$ e ainda que o centro de gravidade do cilindro $\nu$ é o [ponto] $\theta$. Por conseguinte, o centro [de gravidade] do segmento [esférico] $\alpha\beta\delta$ é o ponto $\chi$.

## 11.12 Teorema X: Centro de Gravidade de um Segmento de Elipsoide de Revolução

Da mesma maneira que isto, analisa-se que:[144]

> *o centro de gravidade de todo segmento de elipsoide está sobre a reta que constitui o eixo do segmento, dividindo-a de tal maneira que a razão entre a parte da mesma [reta] do lado do vértice do segmento, e a parte restante, é igual à razão entre a soma do eixo do segmento com o quádruplo do eixo do segmento oposto, e a soma do eixo do segmento com o dobro do eixo do segmento oposto.*

## 11.13 Teorema XI: Volume e Centro de Gravidade de um Segmento de Hiperboloide de Revolução

Com [este] método analisa-se também que:[145]

> *todo segmento de hiperboloide de revolução*[146] *tem a mesma razão para um cone com a mesma base e o mesmo eixo que o segmento, que aquela [razão] entre a soma do eixo do segmento [de hiperboloide] com o triplo da [reta] adjunta ao eixo,*[147] *e a soma do eixo do segmento de hiperboloide com o dobro da [reta] adjunta ao eixo.*
>
> *O centro de gravidade do hiperboloide de revolução [está em um ponto] que divide o eixo de tal maneira que a razão entre a parte próxima ao vértice*

também a Equação (8.23).

[143] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro V, Proposição 22, citada na Nota de Rodapé 136, página 168 deste trabalho, ver ainda [Euc56a, Volume 2, pág. 179] e [Euc09, pág. 227].

[144] Ou seja, pode-se utilizar o mesmo método mecânico para demonstrar a proposição apresentada a seguir.

[145] Ou seja, pode-se utilizar o mesmo método mecânico para demonstrar as proposições apresentadas a seguir.

[146] Arquimedes chama a hipérbole de *seção de cone obtusângulo*, ver a Seção 9.1.

[147] Ver *Sobre Conoides e Esferoides*, Proposição 25, [Mug70, pág. 216].

*e a parte restante seja igual à razão entre a [soma] do triplo do eixo com o óctuplo da reta adjunta e a [soma] do eixo do próprio hiperboloide com o quádruplo da reta a ele adjunta.*

Se bem que muitos outros teoremas possam ser demonstrados [por este método], deixaremos de mencioná-los aqui pois o método foi provado pelos [teoremas] mostrados anteriormente.[148]

## 11.14 Teorema XII: Volume da Unha Cilíndrica. Determinação Mecânica

*Se for inscrito em um prisma reto tendo por base [dois] quadrados, um cilindro com as bases nos quadrados opostos e sua superfície tangente aos quatro planos [paralelogramos] restantes, e se for traçado um plano pelo centro de um dos círculos de base do cilindro e por um dos lados do quadrado oposto, a figura cortada pelo plano traçado, é a sexta parte de todo o prisma.*

Analisa-se [isso] por este método. Mostrado isso, voltaremos à sua demonstração por meios geométricos.[149]

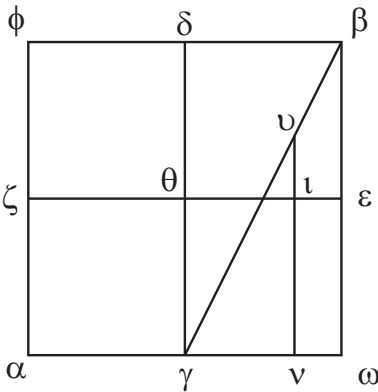



Figura 11.9: Primeira Figura do Teorema XII.

Imagine-se um prisma reto tendo bases quadradas e no prisma um cilindro inscrito como foi dito. Seja o prisma cortado por um plano passando pelo eixo e perpendicular ao plano que cortou o segmento do cilindro. Seja o paralelogramo $\alpha\beta$[150] a interseção [deste plano] e do prisma que contém o cilindro. Seja a reta $\beta\gamma$ a interseção comum do plano que cortou o segmento cilíndrico com o plano traçado pelo eixo e perpendicular ao plano que cortou o segmento cilíndrico.

[148] Para uma reconstrução da demonstração deste Teorema 11 seguindo o raciocínio de Arquimedes, ver [Hay94].
[149] Ver os Teoremas XIV e XV.
[150] Leia-se: o paralelogramo $\alpha\phi\beta\omega$.

Seja a reta $\gamma\delta$ o eixo do prisma e do cilindro e [suponha que a reta] $\varepsilon\zeta$ a corte pela metade, em ângulo reto. Levante-se por $\varepsilon\zeta$ um plano perpendicular a $\gamma\delta$ o qual fará no prisma uma seção quadrada, enquanto que no cilindro a seção [será] um círculo. Seja então o quadrado $\mu\nu$ a interseção com o prisma enquanto que o círculo $\xi o\pi\rho$ [seja] a interseção com o cilindro e o círculo tangencie os lados do quadrado nos pontos $\xi$, $o$, $\pi$ e $\rho$.

Seja a reta $\kappa\lambda$ [ver a Figura 11.10] a interseção comum do plano cortando o segmento cilíndrico e do plano traçado por $\varepsilon\zeta$, perpendicular ao eixo do cilindro. [A reta] $\pi\theta\xi$ a divide em duas partes iguais.

Seja traçada no semicírculo $o\pi\rho$ uma [reta] qualquer $\sigma\tau$ perpendicular a $\pi\chi$. Seja levantado por $\sigma\tau$ um plano perpendicular a $\xi\pi$, o qual seja prolongado de ambos os lados do plano que contém o círculo $\xi o\pi\rho$. Este [plano] fará interseção com o semicilindro cuja base é o semicírculo $o\pi\rho$ e cuja altura é o eixo do prisma, segundo um paralelogramo do qual um lado será igual a $\sigma\tau$ e o outro [será igual] à geratriz do cilindro.

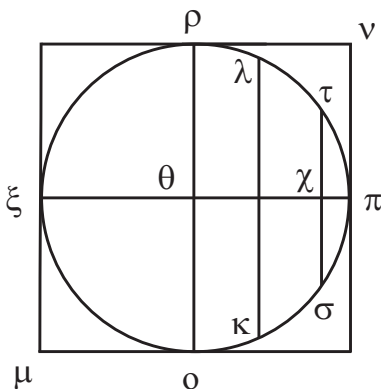



Figura 11.10: Segunda Figura do Teorema XII.

Ele fará também interseção com o segmento cortado do cilindro, segundo um [outro] paralelogramo do qual um lado é igual a $\sigma\tau$ e o outro [é igual] a $\nu\upsilon$ [ver a Figura 11.9]. Seja $\nu\upsilon$ traçada no paralelogramo $\delta\varepsilon$,[151] paralelamente a $\beta\omega$, de modo a cortar $\varepsilon\iota$ igual a $\pi\chi$. Como $\gamma\varepsilon$ é um paralelogramo e $\iota\nu$ é paralela a $\gamma\theta$, e [como] $\varepsilon\theta$ e $\beta\gamma$ são traçadas através [delas], a razão entre $\varepsilon\theta$ e $\theta\iota$ é igual à razão entre $\gamma\omega$ e $\gamma\nu$, isto é,[152] [à razão] entre $\beta\omega$ e $\nu\upsilon$.

Mas $\beta\omega$ está para $\nu\upsilon$ assim como o paralelogramo determinado no semicilindro está para [o paralelogramo] determinado no segmento cortado do cilindro, pois[153] $\sigma\tau$ é o lado comum dos dois paralelogramos. Além disso, $\varepsilon\theta$ é igual a

[151] Embora o texto grego (reproduzido por Heiberg) indique neste ponto o paralelogramo $\delta\varepsilon$, o paralelogramo correto que contém a reta $\nu\upsilon$ é $\delta\beta\omega\gamma$.

[152] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 4, citada na Subseção 9.3.1, página 68 deste trabalho, ver ainda [Euc56a, Volume 2 pág. 200] e [Euc09, pág. 235].

[153] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 1, [Euc09, pág. 231]: "Os triângulos e os paralelogramos que estão sob a mesma altura estão entre si como as bases."

$\theta\pi$, e $\theta\iota$ é igual a $\theta\chi$. Como $\theta\pi$ é igual a $\theta\xi$, a razão entre $\theta\xi$ e $\theta\chi$ é igual à razão entre o paralelogramo determinado no semicilindro e [aquele] determinado no segmento cortado do cilindro.

Imagine-se que o paralelogramo no segmento seja deslocado e colocado no ponto $\xi$ de modo que $\xi$ seja o seu centro de gravidade, e ainda imagine-se que $\xi\pi$ seja uma alavanca cujo ponto médio seja $\theta$.[154] Então o paralelogramo no semicilindro, permanecendo no seu lugar, equilibra em torno do ponto $\theta$ o paralelogramo determinado no segmento do cilindro, deslocado e colocado no ponto $\xi$ da alavanca, de modo que o ponto $\xi$ seja o seu centro de gravidade.

Como $\chi$ é o centro de gravidade do paralelogramo determinado no semicilindro, como $\xi$ é o centro de gravidade do paralelogramo determinado no segmento [cilíndrico] cortado e deslocado, e [como] a razão entre $\theta\xi$ e $\theta\chi$ é igual à razão entre o paralelogramo que dissemos ter $\chi$ como centro de gravidade e o paralelogramo que dissemos ter $\xi$ como centro de gravidade, então o paralelogramo cujo centro de gravidade é $\chi$, equilibrará em torno do [ponto] $\theta$, o paralelogramo cujo centro de gravidade é $\xi$.

Será demonstrado da mesma maneira que, toda vez que for traçada no semicírculo $o\pi\rho$ qualquer outra perpendicular a $\theta\pi$ e pela [reta] traçada for levantado um plano perpendicular a $\theta\pi$ e prolongado dos dois lados do plano em que está o círculo $\xi o\pi\rho$, o paralelogramo determinado no semicírculo, permanecendo no seu lugar, equilibrará em relação ao ponto $\theta$, o paralelogramo determinado no segmento cortado do cilindro, deslocado e colocado na alavanca em $\xi$ de tal maneira que o seu centro de gravidade seja o ponto $\xi$.

Portanto, todos os paralelogramos determinados no cilindro, permanecendo nos seus lugares, equilibrarão em torno do ponto $\theta$ todos os paralelogramos determinados no segmento cortado do cilindro, deslocados e colocados no ponto $\xi$ da alavanca. Por conseguinte, também o semicilindro permanecendo no seu lugar, equilibra em relação ao ponto $\theta$ o segmento cortado [do cilindro] deslocado e colocado no ponto $\xi$ da alavanca, de modo que o ponto $\xi$ seja o seu centro de gravidade.

## 11.15 Teorema XIII: Volume da Unha Cilíndrica. Determinação Mecânica — Continuação

Seja de novo o paralelogramo $\mu\nu$ perpendicular ao eixo[155] e o círculo $\xi o\pi\rho$. Sejam traçadas as [retas] $\theta\mu$ e $\theta\eta$ e a partir delas sejam levantados planos perpendiculares ao plano em que está o semicírculo $o\pi\rho$ e sejam prolongados os ditos planos de ambos os lados.[156]

Haverá então um prisma tendo uma base tão grande quanto o triângulo $\eta\theta\mu$ e uma altura igual ao eixo do cilindro. Este prisma é a quarta parte de todo

[154] O ponto $\theta$ será considerado o fulcro da alavanca.
[155] Isto é, perpendicular ao eixo do cilindro.
[156] Isto é, de ambos os lados do plano que contém o círculo.

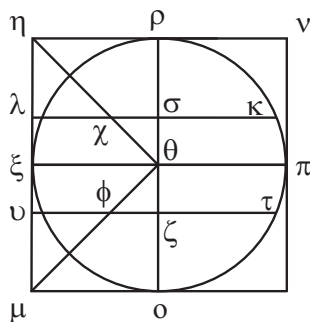



Figura 11.11: Figura do Teorema XIII.

o prisma que contém o cilindro.[157] Sejam traçadas no semicírculo $o\pi\rho$ e no quadrado $\mu\nu$ [duas] retas quaisquer $\kappa\lambda$ e $\tau\upsilon$ equidistantes de $\xi\pi$. Estas retas cortam a circunferência do semicírculo $o\pi\rho$ nos pontos $\kappa$ e $\tau$, o diâmetro $o\rho$ em $\sigma$ e $\zeta$, e as [retas] $\theta\eta$ e $\theta\mu$ nos [pontos] $\phi$ e $\chi$.

Sejam levantados pelas [retas] $\kappa\lambda$ e $\tau\upsilon$ planos perpendiculares a $o\rho$ e sejam prolongados estes planos de ambos os lados do plano em que está o círculo $\xi o\pi\rho$. Então um dos dois planos determinará como interseção no semicilindro cuja base é o semicírculo $o\pi\rho$ e [cuja] altura é aquela do cilindro, um paralelogramo do qual um dos lados é igual a $\kappa\sigma$ e o outro lado é igual ao eixo do cilindro. Da mesma maneira, [determinará como interseção] no prisma $\eta\theta\mu$, [um paralelogramo] do qual um dos lados será igual a $\lambda\chi$ e o outro será igual ao eixo.

Pelos mesmos motivos, no mesmo semicilindro haverá um outro paralelogramo do qual um dos lados é igual a $\tau\zeta$ e o outro é igual ao eixo do cilindro, e no prisma, um [outro] paralelogramo do qual um dos lados é igual a $\upsilon\phi$ e o outro é igual ao eixo do cilindro...[158]

## 11.16 Teorema XIV: Uma Outra Determinação do Volume da Unha Cilíndrica

Seja[159] um prisma reto de bases quadradas e seja o quadrado $\alpha\beta\gamma\delta$ uma das bases. Seja um cilindro inscrito no prisma, e seja a base do cilindro, o círculo $\varepsilon\zeta\eta\theta$, tangente aos lados do [quadrado] $\alpha\beta\gamma\delta$ nos [pontos] $\varepsilon$, $\zeta$, $\eta$ e $\theta$. Seja traçado um plano pelo centro do círculo e pelo lado do quadrado do plano oposto ao plano $\alpha\beta\gamma\delta$ e correspondente [ao lado] $\gamma\delta$.

[157] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XI, Proposição 32, citada na Seção 10.13, ver ainda [Euc56a, Volume 3, pág. 341] e [Euc09, pág. 513].

[158] No manuscrito do *Códice C* falta o texto grego referente à demonstração deste teorema. Porém, com os conhecimentos já adquiridos sobre o método usado por Arquimedes, é possível reconstruir o raciocínio que permite chegar à conclusão final. Os detalhes das construções físicas baseadas na lei da alavanca que permitem determinar o volume da unha cilíndrica, são comentados com as figuras necessárias na Seção 10.13.

[159] Para uma visão alternativa sobre este Teorema, ver [NST01], [NST02] e [Net11].

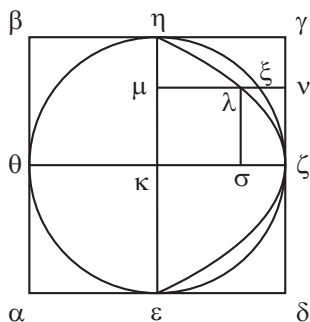



Figura 11.12: Figura do Teorema XIV.

Este [plano] cortará do prisma inteiro um outro prisma que será a quarta parte do prisma inteiro e que será delimitado por três paralelogramos e por dois triângulos opostos entre si.

Seja então inscrita no semicírculo $\varepsilon\zeta\eta$ uma parábola e seja $\zeta\kappa$ [a parte do seu diâmetro situada no segmento] da parábola. Seja traçada no paralelogramo $\delta\eta$ uma [reta] qualquer $\mu\nu$ paralela a $\zeta\kappa$. Ela cortará a circunferência do semicírculo em $\xi$ e a parábola em $\lambda$.

Então o [retângulo][160] $\mu\nu\lambda$ é equivalente ao [quadrado de lado] $\zeta\nu$, pois isto é evidente.[161] Por isso então, $\mu\nu$ está para $\lambda\nu$ assim como o [quadrado] sobre $\eta\kappa$ está para o [quadrado] sobre $\lambda\sigma$.

Seja também levantado sobre $\mu\nu$ um plano perpendicular a $\varepsilon\eta$. Este plano fará interseção com o prisma cortado do prisma inteiro, segundo um triângulo retângulo do qual um dos lados em torno do ângulo reto será $\mu\nu$, e o outro [lado], no plano [passando] por $\gamma\delta$, perpendicular à reta $\gamma\delta$, traçado a partir do [ponto] $\nu$, [será] igual ao eixo do cilindro, e a hipotenusa [estará] no próprio plano secante.

[Este plano] fará também interseção com o segmento cortado do cilindro pelo plano traçado por $\varepsilon\eta$ e pelo lado do quadrado oposto a $\gamma\delta$, segundo um triângulo retângulo do qual um dos lados adjacentes ao ângulo reto será $\mu\xi$ e o outro [lado estará] na superfície do cilindro, traçado por $\xi$ e perpendicular ao plano $\kappa\nu$, e a hipotenusa [estará] no plano secante.

Portanto, pelos mesmos motivos, o [retângulo de lados] $\mu\nu$ e $\lambda\mu$ é equivalente ao [quadrado de lado] $\mu\xi$, pois isto é evidente. E como $\mu\nu$ estará para $\lambda\mu$, assim o [quadrado] sobre $\mu\nu$ [estará] para o [quadrado] sobre $\mu\xi$. Mas a razão do [quadrado] sobre $\mu\nu$ para o [quadrado] sobre $\mu\xi$ é igual à razão do triângulo sobre $\mu\nu$ determinado no prisma, para o triângulo sobre $\mu\xi$ cortado no segmento pela superfície do cilindro. Portanto, $\mu\nu$ está para $\lambda\mu$ assim como o triângulo [do prisma] está para o triângulo [do segmento cilíndrico].

Da mesma maneira será também demonstrado que se for traçada, no para-

[160] Com a denominação $\mu\nu\lambda$, Arquimedes entende o retângulo de lados $\mu\nu$ e $\nu\lambda$.

[161] Esta igualdade corresponde a aplicar a equação da parábola ao ponto $\lambda$, considerando que o *parâmetro* (*orthia*) da parábola é $\mu\nu$. Portanto, a equação da parábola é: $\mu\nu\cdot\nu\lambda = Q(\nu\zeta) = \nu\zeta\cdot\nu\zeta$.

lelogramo circunscrito à parábola, qualquer outra [reta] paralela a $\zeta\kappa$, e se, a partir da [reta] traçada for levantado um plano perpendicular a $\varepsilon\eta$, o triângulo determinado no prisma estará para [o triângulo determinado] no segmento do cilindro assim como a [reta] paralela traçada a $\zeta\kappa$ no paralelogramo $\delta\eta$ está para [a reta] interceptada entre a parábola $\varepsilon\zeta\eta$ e o diâmetro $\varepsilon\eta$.

Preenchido então o paralelogramo $\delta\eta$ pelas [retas] paralelas a $\zeta\kappa$, e o segmento compreendido entre a parábola e o diâmetro preenchido com os segmentos [de reta] interceptados...[162] às paralelas a $\zeta\kappa$ traçadas no paralelogramo, e [a razão] entre todos os triângulos no prisma e todos os triângulos no segmento cortado do cilindro será igual [à razão] entre todas as retas [interceptadas] entre a parábola e a reta $\varepsilon\eta$.

Mas o prisma é constituído por todos os triângulos do prisma, enquanto que o segmento cilíndrico [é constituído] por todos [os triângulos] do segmento, e o paralelogramo $\delta\eta$ [é constituído por] todas as paralelas a $\zeta\kappa$ dentro do paralelogramo, enquanto que o segmento de parábola [é constituído] por todas [as retas] entre a parábola e a [reta] $\varepsilon\eta$.

Por conseguinte, o prisma [está] para o segmento cortado do cilindro, assim como o paralelogramo $\delta\eta$ [está] para o segmento $\varepsilon\zeta\eta$ compreendido entre a parábola e a reta $\varepsilon\eta$.

Mas o paralelogramo $\delta\eta$ é uma vez e meia o segmento compreendido entre a parábola e a reta $\varepsilon\eta$, pois isso foi demonstrado[163] nos [escritos] publicados anteriormente. Portanto, também o prisma é uma vez e meia o segmento cortado do cilindro. Então o segmento do cilindro está para dois assim como o prisma está para três. Mas o prisma está para três assim como todo o prisma circunscrito ao cilindro está para doze, por ser um [prisma] um quarto do outro [prisma].

Portanto, o segmento do cilindro está para dois, assim como todo o prisma está para doze. Desta maneira, o segmento cortado do cilindro é a sexta parte do prisma.

## 11.17 Teorema XV: Demonstração Geométrica do Teorema XII

Seja um prisma reto de bases quadradas, sendo uma delas o quadrado $\alpha\beta\gamma\delta$. Seja inscrito no prisma um cilindro, cuja base é o círculo $\varepsilon\zeta\eta$. Então este é tangente aos lados do quadrado nos pontos $\varepsilon$, $\zeta$, $\eta$ e $\theta$. Seja $\kappa$ o centro [do círculo] e pelo diâmetro $\varepsilon\eta$ e por um dos lados [do quadrado oposto, correspondente a $\gamma\delta$], seja traçado um plano...[164] Então este plano corta do prisma inteiro, um

[162] Neste ponto existe uma lacuna no texto grego que Heiberg não conseguiu preencher. Foi somente em 2001 que Netz, Saito e Tchernetska, [NST01] e [NST02], usando tecnologias modernas, publicaram uma "nova leitura" do texto grego deste teorema, preenchendo a lacuna. Porém, devemos observar que o preenchimento desta lacuna não afeta as conclusões do teorema, cuja demonstração física encontra-se na Seção 10.14. Uma demonstração da relação matemática utilizada nesse teorema encontra-se na Seção A.8 do Apêndice A.

[163] Ver nossa demonstração do Teorema I de *O Método*, Seção 10.2.

[164] O texto grego apresenta algumas falhas, que podem ser reconstituídas a partir dos Teoremas XII e XIV, pois trata-se da construção da mesma Figura (uma unha cilíndrica ou um

prisma, e [corta] do cilindro, um segmento cilíndrico.

> *Afirmo que este segmento cortado do cilindro pelo plano traçado, é a sexta parte do prisma inteiro, o que será demonstrado.*

Inicialmente demonstraremos que será possível inscrever, e também circunscrever, no segmento cortado do cilindro, uma figura sólida constituída por prismas tendo a mesma altura e tendo como bases triângulos semelhantes, de modo que a figura circunscrita seja maior que a inscrita, [por uma grandeza] menor que qualquer grandeza considerada.

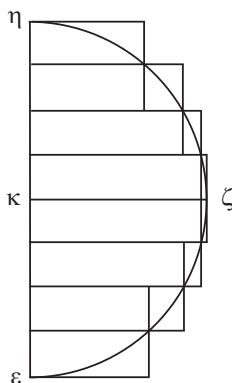



Figura 11.13: Primeira Figura do Teorema XV.

[Divida-se,[165] portanto, o diâmetro $\varepsilon\eta$ do semicírculo $\varepsilon\zeta\eta$, sucessivamente, em duas partes iguais. Sejam traçadas pelos pontos de divisão as paralelas a $\zeta\kappa$ cortando a circunferência do semicírculo. Sejam traçadas, pelos pontos de interseção destas retas com a circunferência, as paralelas a $\varepsilon\eta$ e sejam essas prolongadas dos dois lados até sua interseção com as duas paralelas a $\zeta\kappa$ mais próximas.

Sejam traçados pelas paralelas planos perpendiculares ao plano do semicírculo. Estes planos determinarão prismas inscritos e circunscritos ao segmento cilíndrico, tendo a mesma altura e tendo como bases triângulos retângulos com um cateto sobre as paralelas a $\zeta\kappa$.

Se agora continuarmos a divisão de $\varepsilon\eta$ em duas partes iguais até que os dois prismas adjacentes a $\zeta\kappa$ sejam menores que uma grandeza qualquer,[166] a

---

segmento de cilindro, como esta forma geométrica é chamada por Arquimedes).

[165] Existe neste ponto do texto grego uma grande lacuna que não foi possível reconstituir. Heiberg, porém, conseguiu reproduzir o desenvolvimento lógico que estava faltando, seguindo o estilo de Arquimedes. Apresentamos a seguir a demonstração de acordo com Heiberg.

[166] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro X, Proposição 1, [Euc09, pág. 354]: "Sendo expostas duas magnitudes desiguais, caso da maior seja subtraída uma maior do que a metade e, da que é deixada, uma maior do que a metade, e isso aconteça sempre, alguma magnitude será deixada, a qual será menor do que a menor magnitude exposta."

diferença entre as figuras sólidas circunscrita e inscrita ao segmento cilíndrico será também menor que uma grandeza qualquer, pois esta diferença é igual à soma dos dois prismas adjacentes a $\zeta\kappa$. Com efeito, a todos os outros prismas da figura circunscrita correspondem prismas iguais da figura inscrita.

Seja agora traçada no semicírculo uma parábola $\varepsilon\zeta\eta$ e pelos seus pontos de interseção com as retas paralelas a $\zeta\kappa$, sejam traçadas paralelas a $\varepsilon\eta$ as quais sejam prolongadas como dito anteriormente.[167]

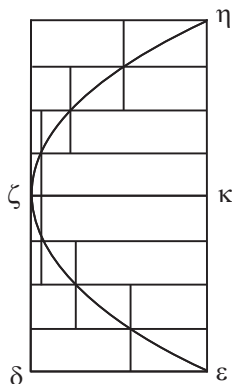



Figura 11.14: Segunda Figura do Teorema XV.

Existirão então duas figuras, uma circunscrita e outra inscrita ao segmento de parábola, constituídas por paralelogramos[168] tais que a diferença entre a primeira e a segunda seja igual à soma dos dois paralelogramos tendo a base comum em $\zeta\kappa$. Além disso, cada um desses paralelogramos corresponde a um dos prismas no interior das figuras sólidas mencionados anteriormente.

Agora, se o segmento cortado do cilindro não é equivalente à sexta parte do prisma inteiro, será então maior ou menor.

Imagine-se inicialmente que seja maior. O prisma cortado pelo plano inclinado é, portanto, menor que três meios do segmento de cilindro.[169]

Agora inscreva-se e circunscreva-se ao segmento cilíndrico figuras sólidas tais como foi dito, de modo que a diferença entre a figura circunscrita e a inscrita seja menor que uma grandeza qualquer.

Então, como foi demonstrado,[170] a razão entre as retas traçadas no paralelogramo $\delta\eta$ e as retas interceptadas entre a parábola e a reta $\varepsilon\eta$, é igual à razão entre os triângulos do prisma cortado pelo plano inclinado e os triângulos do segmento cilíndrico. Ou seja, é igual à razão entre os prismas contidos no prisma

[167] Como no caso do semicírculo, estas retas são prolongadas dos dois lados até sua interseção com as duas paralelas a $\zeta\kappa$ mais próximas.

[168] No caso trata-se de retângulos.

[169] Chamando $SC$ = Segmento Cilíndrico, $PP$ = Prisma Parcial e $PT$ = Prisma Total, temos pelo Teorema XIV que: $PP = (1/4)PT$ e pela hipótese estabelecida $SC > (1/6)PT$. Portanto: $SC > (4/6)PP$, ou $PP < (3/2)SC$.

[170] Ver o Teorema XIV.

cortado pelo plano inclinado e os prismas contidos na figura sólida inscrita,[171] diminuída de dois.[172]

E como a razão entre as retas indicadas é igual à razão dos paralelogramos em que é dividido o paralelogramo $\delta\eta$, com os paralelogramos contidos na figura inscrita na parábola,[173] menos dois,[174] então o prisma cortado pelo plano inclinado estará para a figura inscrita, assim como[175] o paralelogramo $\delta\eta$ está para a figura inscrita na parábola.

Portanto, sendo que o prisma cortado pelo plano inclinado é inferior aos três meios do segmento cilíndrico[176] e sendo a diferença entre este último e a figura inscrita inferior a uma grandeza qualquer,][177] então o prisma cortado pelo plano inclinado será inferior aos três meios da figura sólida inscrita no segmento cortado do cilindro.

Mas foi demonstrado que o prisma cortado pelo plano inclinado está para a figura sólida inscrita no segmento cortado do cilindro, assim como o paralelogramo $\delta\eta$ está para a soma dos paralelogramos inscritos no segmento, compreendidos entre a parábola e a reta $\varepsilon\eta$.

Portanto, o paralelogramo $\delta\eta$ é menor que os três meios da soma dos paralelogramos do segmento[178] compreendido entre a parábola e a reta $\varepsilon\eta$. Isto certamente é impossível, pois foi demonstrado em outro lugar[179] que o paralelogramo $\delta\eta$ é equivalente aos três meios do segmento [de parábola] compreendido entre a parábola e a reta $\varepsilon\eta$.

Portanto, o segmento cilíndrico não é superior[180] [à sexta parte do prisma inteiro.

Imagine-se em seguida que o segmento cilíndrico cortado seja então inferior à sexta parte do prisma inteiro. O prisma cortado pelo plano inclinado é, portanto, superior aos três meios do segmento cilíndrico.

Seja circunscrita novamente ao segmento cilíndrico uma figura sólida e seja inscrita uma outra da maneira descrita anteriormente. Será demonstrado também do mesmo modo que a razão entre a soma dos prismas contidos no prisma cortado pelo plano inclinado e a soma dos prismas da figura circunscrita ao segmento cilíndrico é igual à razão entre os paralelogramos contidos no parale-

---

[171] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XI, Proposição 32, citada na Seção 10.13, ver ainda [Euc56a, Volume 3, pág. 341] e [Euc09, pág. 513].

[172] Existem dois prismas pequenos a mais no prisma cortado pelo plano inclinado, do que o número de prismas pequenos contidos na figura sólida inscrita.

[173] Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 1, citada na Nota de Rodapé 153, página 171 deste trabalho, ver ainda [Euc56a, Volume 2, pág. 191] e [Euc09, 231].

[174] Existem dois paralelogramos pequenos a mais no paralelogramo $\delta\eta$, do que o número de paralelogramos pequenos contidos na figura inscrita na parábola.

[175] Ver o Teorema mencionado em *O Método* logo após os Lemas, página 147 deste trabalho. Ver ainda *Sobre Conoides e Esferoides*, Proposição 1, [Arc02b, págs. 105-106], assim como os comentários de Rufini, [Ruf61, pág. 106].

[176] Pela hipótese suposta neste caso.

[177] Fim da lacuna.

[178] Este segmento é o segmento de parábola.

[179] Ver *Quadratura da Parábola*, Proposição 24, [Mug71a, pág. 193] e *O Método*, Teorema I.

[180] Neste ponto há outra lacuna no texto grego. O raciocínio a seguir foi reconstituído por Heiberg.

logramo $\delta\eta$ e os paralelogramos da figura circunscrita ao segmento de parábola compreendidos entre a parábola e a reta $\varepsilon\eta$.][181]

Portanto, a razão entre [a soma de] todos os prismas no prisma cortado pelo plano inclinado e [a soma de] todos os prismas na figura circunscrita ao segmento cilíndrico será igual à razão entre [a soma] de todos os paralelogramos no paralelogramo $\delta\eta$ e [a soma] de todos os paralelogramos na figura circunscrita ao segmento, compreendidos entre a parábola e a reta $\varepsilon\eta$.

Isto é, o prisma cortado pelo plano inclinado e a figura circunscrita ao segmento cilíndrico, terão a mesma razão que o paralelogramo $\delta\eta$ e a figura circunscrita ao segmento [de parábola] compreendida entre a parábola e a reta $\varepsilon\eta$.

Mas o prisma cortado pelo plano inclinado é superior aos três meios da figura sólida circunscrita ao segmento cilíndrico.[182] [Por conseguinte, o paralelogramo $\delta\eta$ também é superior aos três meios da figura circunscrita ao segmento de parábola compreendida entre a parábola e a reta $\varepsilon\eta$, o que certamente é impossível, pois foi demonstrado em outro lugar[183] que o paralelogramo $\delta\eta$ é equivalente aos três meios do segmento de parábola compreendido entre a parábola e a reta $\varepsilon\eta$.

Portanto, o segmento cilíndrico também não é inferior à sexta parte do prisma inteiro. Assim então, o segmento cilíndrico não sendo nem inferior nem superior, ele será igual à sexta parte do prisma todo, como era necessário demonstrar.]

[181] Neste ponto termina a lacuna do texto grego.

[182] O texto grego apresenta aqui mais uma lacuna bem na parte da conclusão final do teorema. A reconstituição desta parte apresentada a seguir também é devida a Heiberg. É a partir dela que foram feitas as traduções em outros idiomas.

[183] Ver a *Quadratura da Parábola*, Proposição 24, [Mug71a, pág. 193].

# Capítulo 12

# Conclusão

Concluímos assim com as necessárias explicações de física e matemática, a tradução completa desta fascinante obra de Arquimedes.

Para provar teoremas puramente geométricos como cálculos de áreas e de volumes, ele utilizou aspectos básicos da mecânica. Em particular, podemos citar a utilização do conceito de centro de gravidade, a lei da alavanca e condições de equilíbrio de corpos sob a ação gravitacional terrestre.

A leitura desse livro de Arquimedes onde são tratados e exemplificados estes temas importantes é um grande desafio para o leitor moderno. Isto ocorre não apenas pela linguagem dos matemáticos gregos, muito distante da nossa, mas também pela complexidade do raciocínio do autor.

Através deste trabalho procuramos apresentar estes conceitos usando uma linguagem matemática mais próxima da nossa cultura. Além disso, apresentamos figuras de diversas alavancas em equilíbrio com corpos dependurados em seus braços e estando a distâncias específicas do fulcro, seguindo as especificações de Arquimedes. Isto permite uma interpretação experimental das passagens físicas envolvidas no seu raciocínio.

Acreditamos dessa maneira poder contribuir para uma melhor compreensão das obras de Arquimedes, que já conta com alguns de seus livros traduzidos e comentados em português, como listado na Seção 5.1.

# Apêndice A

# Demonstrações das Relações Matemáticas Básicas dos Teoremas

## A.1 Teorema I

Nesta Seção vamos apresentar a demonstração matemática da Equação (10.2).

A parábola que nos interessa aparece na Figura A.1.

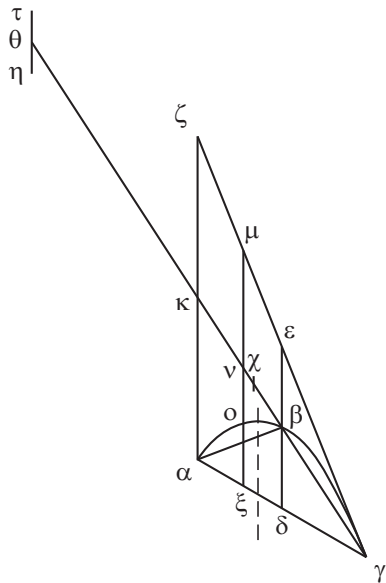



Figura A.1: Figura do Teorema I.

A demonstração parte de um teorema provado previamente por Arquimedes em seu tratado *Sobre a Quadratura da Parábola*. Na Proposição 4 deste livro Arquimedes afirma o seguinte, referindo-se à Figura A.1:

> [...] portanto, fica evidente que a razão entre $\alpha\delta$ e $\delta\xi$ é igual à razão entre $\nu\xi$ e $\nu o$.

Esta relação pode ser escrita matematicamente da seguinte forma:

$$\frac{\alpha\delta}{\delta\xi} = \frac{\nu\xi}{\nu o} \ . \tag{A.1}$$

Ou:

$$\frac{\alpha\delta}{\alpha\delta - \alpha\xi} = \frac{\nu\xi}{\nu\xi - \xi o} \ . \tag{A.2}$$

Pelas propriedades das proporções dadas pelas Equações (8.21) e (8.27), temos:

$$\frac{\alpha\delta}{\alpha\xi} = \frac{\nu\xi}{\xi o} \ . \tag{A.3}$$

Portanto:

$$\frac{2(\alpha\delta)}{\alpha\xi} = \frac{2(\nu\xi)}{\xi o} \ . \tag{A.4}$$

Com isto vem então:

$$\frac{\alpha\gamma}{\alpha\xi} = \frac{\mu\xi}{\xi o} \ . \tag{A.5}$$

Mas de acordo com a Proposição 2 do Livro VI de *Os Elementos* de Euclides, citada na página 70 deste trabalho, juntamente com a Figura A.1, vem que:

$$\frac{\alpha\gamma}{\alpha\xi} = \frac{\gamma\kappa}{\kappa\nu} \ . \tag{A.6}$$

Mas por construção temos que:

$$\gamma\kappa = \theta\kappa \ . \tag{A.7}$$

Então, pelas Equações (A.5), (A.6) e (A.7) temos:

$$\frac{\mu\xi}{\xi o} = \frac{\gamma\kappa}{\kappa\nu} = \frac{\theta\kappa}{\kappa\nu} \ . \tag{A.8}$$

Esta equação, análoga à Equação (10.2), é o ponto de partida da demonstração física.

## A.2 Teoremas II e VII

Demonstração das relações matemáticas necessárias para os Teoremas II e VII. Em particular, vamos apresentar a demonstração da Equação (10.11).

Os objetos que nos interessam neste caso são representados pela Figura A.2.

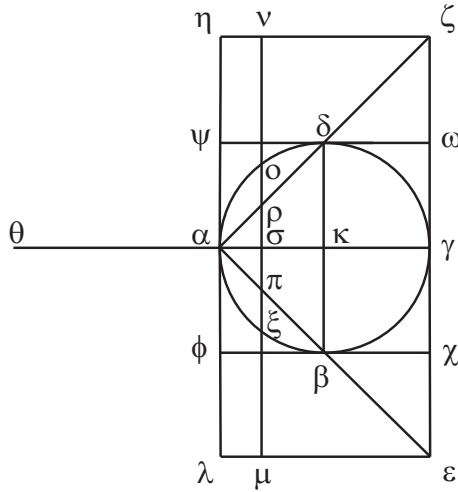



Figura A.2: Figura do Teorema II.

Para a demonstração da relação matemática básica necessária para a dedução física do Teorema II, Arquimedes parte das igualdades obtidas na construção desta figura, a saber:

$$\alpha\gamma = \mu\sigma \ , \tag{A.9}$$

e

$$\alpha\sigma = \pi\sigma \ . \tag{A.10}$$

Vamos representar $R(AB,\ CD) = AB \cdot CD$ como sendo o retângulo de lados $AB$ e $CD$, e $Q(FG) = FG \cdot FG$ como sendo o quadrado de lado $FG$. Multiplicando as Equações (A.9) e (A.10) membro a membro, obtemos:

$$R(\alpha\gamma,\ \alpha\sigma) = R(\mu\sigma,\ \pi\sigma) \ . \tag{A.11}$$

De acordo com o Corolário da Proposição 8 do Livro VI de *Os Elementos* de Euclides, citado na página 67 deste trabalho, juntamente com a Figura A.2, temos que:

$$R(\alpha\gamma,\ \alpha\sigma) = Q(\alpha\xi) \ . \tag{A.12}$$

Portanto:

$$R(\mu\sigma,\ \pi\sigma) = Q(\alpha\xi) \ . \tag{A.13}$$

Da Figura A.2 vem que o triângulo $\alpha\pi\sigma$ é isósceles, tal que

$$\alpha\sigma = \pi\sigma \ . \tag{A.14}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo $\alpha\xi\sigma$ e usando a Equação (A.14), obtemos:

$$Q(\alpha\xi) = Q(\alpha\sigma) + Q(\xi\sigma) = Q(\pi\sigma) + Q(\xi\sigma) \ . \tag{A.15}$$

Combinando as Equações (A.13) e (A.15) vem que:

$$R(\mu\sigma,\ \pi\sigma) = Q(\xi\sigma) + Q(\pi\sigma) \ . \tag{A.16}$$

Agora dividimos membro a membro as Equações (A.9) e (A.10), obtendo:

$$\frac{\alpha\gamma}{\alpha\sigma} = \frac{\mu\sigma}{\pi\sigma} \ . \tag{A.17}$$

Por construção temos que:

$$\alpha\gamma = \alpha\theta \ . \tag{A.18}$$

Pelas Equações (A.17) e (A.18) vem que:

$$\frac{\alpha\theta}{\alpha\sigma} = \frac{\mu\sigma}{\pi\sigma} = \frac{\mu\sigma \cdot \mu\sigma}{\pi\sigma \cdot \mu\sigma} \ . \tag{A.19}$$

Ou seja:

$$\frac{\alpha\theta}{\alpha\sigma} = \frac{Q(\mu\sigma)}{R(\mu\sigma,\ \pi\sigma)} \ . \tag{A.20}$$

Combinando a Equação (A.20) com a Equação (A.16) vem que:

$$\frac{\alpha\theta}{\alpha\sigma} = \frac{Q(\mu\sigma)}{Q(\xi\sigma) + Q(\pi\sigma)} \ . \tag{A.21}$$

Mas a mesma razão entre os raios no lado direito desta equação vai continuar valendo para a razão entre os diâmetros. Isto é, podemos dobrar os raios $\mu\sigma$, $\xi\sigma$ e $\pi\sigma$, obtendo os diâmetros $\mu\nu$, $\xi o$ e $\pi\rho$, respectivamente, que a razão do lado direito ainda será válida:

$$\frac{Q(\mu\sigma)}{Q(\xi\sigma) + Q(\pi\sigma)} = \frac{Q(\mu\nu)}{Q(\xi o) + Q(\pi\rho)} \ . \tag{A.22}$$

Combinando as Equações (A.21) e (A.22) obtemos então:

$$\frac{\alpha\theta}{\alpha\sigma} = \frac{Q(\mu\nu)}{Q(\xi o) + Q(\pi\rho)} \ . \tag{A.23}$$

Esta equação, análoga à Equação (10.11), é o ponto de partida para a demonstração física deste segundo Teorema.

## A.3 Teorema III

Demonstração matemática da Equação (10.25).

Os objetos que nos interessam neste caso são representados pela Figura A.3.

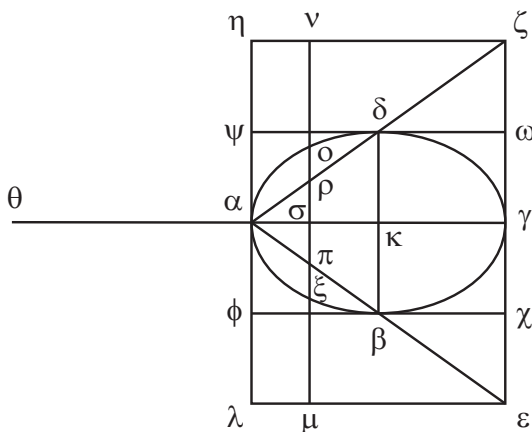



Figura A.3: Construção geométrica do teorema III.

A demonstração da relação matemática necessária para provar este teorema começa com a observação de que os triângulos $\alpha\gamma\varepsilon$ e $\alpha\pi\sigma$ são equiângulos. Portanto, aplica-se a Proposição 4 do Livro VI de *Os Elementos* de Euclides.[1] Temos então as seguintes proporções:

$$\frac{\alpha\gamma}{\alpha\sigma} = \frac{\alpha\varepsilon}{\alpha\pi} \ , \tag{A.24}$$

e

$$\frac{\alpha\varepsilon}{\alpha\pi} = \frac{\gamma\varepsilon}{\pi\sigma} \ . \tag{A.25}$$

Mas, por construção:

$$\alpha\gamma = \alpha\theta \ . \tag{A.26}$$

Sendo $\mu\sigma$ e $\gamma\varepsilon$ os lados opostos de um paralelogramo, temos que:

$$\mu\sigma = \gamma\varepsilon \ . \tag{A.27}$$

Então podemos escrever que:

$$\frac{\alpha\theta}{\alpha\sigma} = \frac{\mu\sigma}{\pi\sigma} \ . \tag{A.28}$$

Por outro lado, multiplicando o numerador e o denominador do segundo membro por $\mu\sigma$ temos:

[1] Citada na Subseção 9.3.1, página 68 deste trabalho, ver também [Euc56a, Volume 2, pág. 200] e [Euc09, pág. 235].

$$\frac{\mu\sigma}{\pi\sigma} = \frac{\mu\sigma \cdot \mu\sigma}{\mu\sigma \cdot \pi\sigma} = \frac{Q(\mu\sigma)}{R(\mu\sigma,\ \pi\sigma)} \ . \tag{A.29}$$

Lembramos aqui a notação $Q(\mu\sigma) = \mu\sigma \cdot \mu\sigma$ como sendo o quadrado de lado $\mu\sigma$ e $R(\mu\sigma,\ \mu\pi) = \mu\sigma \cdot \mu\pi$ como sendo o retângulo de lados $\mu\sigma$ e $\mu\pi$.

Neste ponto, para seguir o raciocínio de Arquimedes, devemos introduzir a equação da elipse (9.23), tal como foi deduzida no Capítulo 9, que lembramos aqui, de forma simplificada:[2]

$$\frac{Q(ordenada)}{R(abscissa,\ complemento\ da\ abscissa)} = constante \ . \tag{A.30}$$

Aplicando esta equação a dois pontos de uma elipse que podemos chamar de 1 e 2, teremos então:

$$\frac{R(abscissa_1,\ complemento_1)}{Q(ordenada_1)} = \frac{R(abscissa_2,\ complemento_2)}{Q(ordenada_2)} \ . \tag{A.31}$$

Esta expressão aplicada aos pontos $\xi$ e $\beta$ na Figura 10.17 permite escrever:

$$\frac{R(\alpha\sigma,\ \sigma\gamma)}{Q(\xi\sigma)} = \frac{R(\alpha\kappa,\ \gamma\kappa)}{Q(\beta\kappa)} \ . \tag{A.32}$$

Mas

$$\alpha\kappa = \gamma\kappa \ . \tag{A.33}$$

Então:

$$R(\alpha\kappa,\ \gamma\kappa) = Q(\alpha\kappa) \ . \tag{A.34}$$

Pela semelhança dos triângulos $\alpha\beta\kappa$ e $\alpha\pi\sigma$, temos:

$$\frac{\alpha\kappa}{\beta\kappa} = \frac{\alpha\sigma}{\pi\sigma} \ , \tag{A.35}$$

e também:

$$\frac{Q(\alpha\kappa)}{Q(\beta\kappa)} = \frac{Q(\alpha\sigma)}{Q(\pi\sigma)} \ . \tag{A.36}$$

Substituindo estes resultados na Equação (A.32) obtém-se:

$$\frac{R(\alpha\sigma,\ \sigma\gamma)}{Q(\xi\sigma)} = \frac{Q(\alpha\kappa)}{Q(\beta\kappa)} = \frac{Q(\alpha\sigma)}{Q(\pi\sigma)} \ . \tag{A.37}$$

Pela propriedade *permutando* das proporções[3] aplicada à Equação (A.37), temos:

---

[2] Chamamos de *complemento da abscissa* ou simplesmente de *complemento* à diferença entre o eixo maior da elipse e a própria abscissa.

[3] Ver a Equação (8.20).

$$\frac{Q(\alpha\sigma)}{R(\alpha\sigma,\ \gamma\sigma)} = \frac{Q(\pi\sigma)}{Q(\xi\sigma)}\ . \tag{A.38}$$

Agora, na Figura 10.17 verificamos que os triângulos $\alpha\pi\sigma$ e $\pi\mu\varepsilon$ são semelhantes por serem equiângulos. Portanto, podemos escrever que:

$$\frac{\alpha\sigma}{\varepsilon\mu} = \frac{\pi\sigma}{\mu\pi}\ . \tag{A.39}$$

Mas, por serem lados opostos de um paralelogramo, temos que:

$$\varepsilon\mu = \gamma\sigma\ . \tag{A.40}$$

Então:

$$\frac{\alpha\sigma}{\gamma\sigma} = \frac{\pi\sigma}{\mu\pi}\ . \tag{A.41}$$

Multiplicando o numerador e o denominador do primeiro membro desta igualdade por $\alpha\sigma$ e multiplicando o numerador e o denominador do segundo membro por $\pi\sigma$ chegamos à seguinte relação:

$$\frac{\alpha\sigma\cdot\alpha\sigma}{\gamma\sigma\cdot\alpha\sigma} = \frac{\pi\sigma\cdot\pi\sigma}{\mu\pi\cdot\pi\sigma}\ . \tag{A.42}$$

Utilizando a notação simplificada podemos escrever:

$$\frac{Q(\alpha\sigma)}{R(\alpha\sigma,\ \gamma\sigma)} = \frac{Q(\pi\sigma)}{R(\mu\pi,\ \pi\sigma)}\ . \tag{A.43}$$

Comparando este resultado com a Equação (A.38) concluímos que:

$$R(\mu\pi,\ \pi\sigma) = Q(\xi\sigma)\ . \tag{A.44}$$

Somando Q($\pi\sigma$) aos dois membros desta igualdade, obtemos:

$$\mu\pi\cdot\pi\sigma + \pi\sigma\cdot\pi\sigma = Q(\xi\sigma) + Q(\pi\sigma)\ . \tag{A.45}$$

Ou então:

$$\pi\sigma\cdot(\mu\pi + \pi\sigma) = Q(\xi\sigma) + Q(\pi\sigma)\ , \tag{A.46}$$

ou ainda:

$$R(\mu\sigma,\ \pi\sigma) = Q(\xi\sigma) + Q(\pi\sigma)\ . \tag{A.47}$$

Substituindo o valor da Equação (A.47) na Equação (A.29) chega-se na seguinte expressão:

$$\frac{\mu\sigma}{\pi\sigma} = \frac{Q(\mu\sigma)}{R(\mu\sigma,\ \pi\sigma)} = \frac{Q(\mu\sigma)}{Q(\xi\sigma)+Q(\pi\sigma)}\ . \tag{A.48}$$

Concluímos a dedução matemática comparando a Equação (A.48) com a Equação (A.28), obtendo:

$$\frac{\alpha\theta}{\alpha\sigma} = \frac{Q(\mu\sigma)}{Q(\xi\sigma) + Q(\pi\sigma)} \ . \tag{A.49}$$

Esta equação, análoga à Eq. (10.25), é a base matemática necessária para a demonstração física do terceiro Teorema.

## A.4 Teorema IV

Demonstração da Equação (10.39). Os objetos deste Teorema estão representados na Figura A.4.

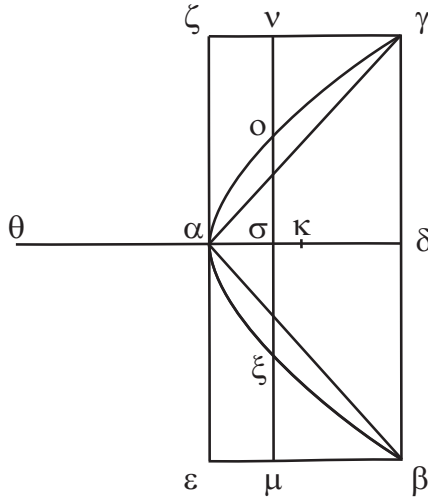



Figura A.4: Construção geométrica do teorema IV.

Sendo $\alpha\beta\gamma$ uma parábola e sendo as retas $\xi\sigma$ e $\beta\delta$ duas ordenadas,[4] podemos escrever, aplicando a equação da parábola para os pontos $\beta$ e $\xi$:

$$Q(\beta\delta) = constante \cdot \alpha\delta \ , \tag{A.50}$$

e

$$Q(\xi\sigma) = constante \cdot \alpha\sigma \ . \tag{A.51}$$

Dividindo membro a membro temos:

[4] Ver a Equação (9.10).

$$\frac{\alpha\delta}{\alpha\sigma} = \frac{Q(\beta\delta)}{Q(\xi\sigma)} \ . \tag{A.52}$$

Mas

$$\alpha\delta = \alpha\theta \ , \tag{A.53}$$

e

$$\beta\delta = \mu\sigma \ . \tag{A.54}$$

Portanto:

$$\frac{\alpha\theta}{\alpha\sigma} = \frac{Q(\mu\sigma)}{Q(\xi\sigma)} \ . \tag{A.55}$$

Esta equação, análoga à Equação (10.39), é a base matemática necessária para a demonstração física deste Teorema.

## A.5 Teorema V

Demonstração matemática da Equação (10.46). Os objetos representados neste Teorema aparecem na Figura A.5.

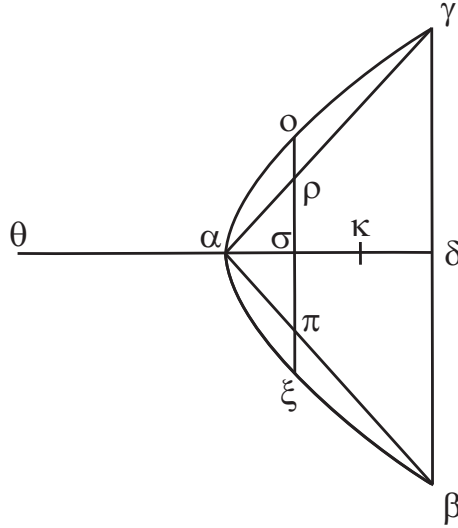



Figura A.5: Construção geométrica do teorema V.

Usando o mesmo raciocínio do teorema anterior e aplicando a equação da parábola[5] para os pontos $\beta$ e $\xi$, temos:

[5] Ver a Equação (9.10).

$$\frac{\alpha\delta}{\alpha\sigma} = \frac{Q(\beta\delta)}{Q(\xi\sigma)} \ . \tag{A.56}$$

Por outro lado, devido à semelhança dos triângulos $\alpha\beta\delta$ e $\alpha\pi\sigma$, temos:

$$\frac{\alpha\delta}{\alpha\sigma} = \frac{\beta\delta}{\pi\sigma} \ . \tag{A.57}$$

Desta última equação, multiplicando o numerador e o denominador do segundo membro por $\beta\delta$, vem:

$$\frac{\alpha\delta}{\alpha\sigma} = \frac{Q(\beta\delta)}{R(\pi\sigma,\ \beta\delta)} \ . \tag{A.58}$$

Comparando as Equações (A.56) e (A.58) concluímos que:

$$\frac{Q(\beta\delta)}{Q(\xi\sigma)} = \frac{Q(\beta\delta)}{R(\pi\sigma,\ \beta\delta)} \ . \tag{A.59}$$

Portanto,

$$Q(\xi\sigma) = R(\pi\sigma,\ \beta\delta) \ . \tag{A.60}$$

De acordo com *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 17:[6]

> Caso três retas estejam em proporção, o retângulo contido pelos extremos é igual ao quadrado sobre a média; e, caso o retângulo contido pelos extremos seja igual ao quadrado sobre a média, as três retas estarão em proporção.

Ou seja, se três segmentos de reta são proporcionais, então o retângulo formado pelos extremos é igual ao quadrado do termo médio. Isto pode ser escrito da seguinte forma. Caso:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \ , \tag{A.61}$$

então

$$ac = b^2 \ , \tag{A.62}$$

e vice-versa.

A Equação (A.60) é análoga à Equação (A.62). Concluímos então que os segmentos de reta $\beta\delta$, $\xi\sigma$ e $\pi\sigma$ são proporcionais, ou seja:

$$\frac{\beta\delta}{\xi\sigma} = \frac{\xi\sigma}{\pi\sigma} \ . \tag{A.63}$$

[6] [Euc09, pág. 248].

Assim sendo, temos também, pelas propriedades das proporções,[7] que:

$$\frac{\beta\delta}{\pi\sigma} = \frac{Q(\xi\sigma)}{Q(\pi\sigma)} \ . \tag{A.64}$$

Por construção temos que:

$$\alpha\theta = \alpha\delta \ . \tag{A.65}$$

Pelas Equações (A.57) e (A.65) vem que:

$$\frac{\beta\delta}{\pi\sigma} = \frac{\alpha\delta}{\alpha\sigma} = \frac{\alpha\theta}{\alpha\sigma} \ . \tag{A.66}$$

Portanto, pela Equação (A.64), obtemos:

$$\frac{\alpha\theta}{\alpha\sigma} = \frac{Q(\xi\sigma)}{Q(\pi\sigma)} \ . \tag{A.67}$$

Esta equação, análoga à Equação (10.46), é a relação matemática básica necessária para a demonstração física deste quinto Teorema.

## A.6 Teorema VI

Dedução da Equação (10.54). Os objetos representados neste Teorema aparecem na Figura A.6.

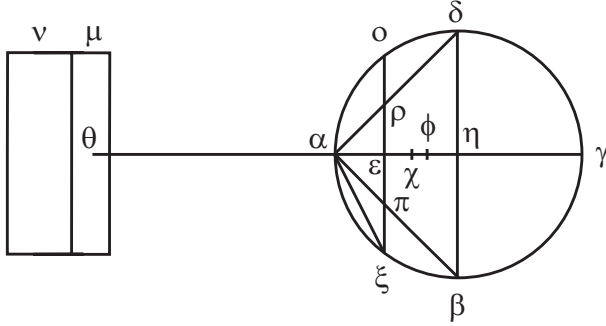



Figura A.6: Construção geométrica do teorema VI de acordo com Mugler.

Usando a notação simplificada podemos escrever:

$$\frac{\alpha\gamma}{\alpha\varepsilon} = \frac{\alpha\gamma \cdot \alpha\varepsilon}{\alpha\varepsilon \cdot \alpha\varepsilon} = \frac{R(\alpha\gamma, \ \alpha\varepsilon)}{Q(\alpha\varepsilon)} \ . \tag{A.68}$$

[7] A Equação (8.13) permite escrever que se $a/b = b/c$, então vale também a seguinte proporção:

$$\frac{a}{c} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{c^2} \ .$$

No Apêndice C demonstramos que:

$$R(\alpha\gamma,\ \alpha\varepsilon) = Q(\alpha\xi)\ . \tag{A.69}$$

A partir destas duas equações vem que:

$$\frac{\alpha\gamma}{\alpha\varepsilon} = \frac{R(\alpha\gamma,\ \alpha\varepsilon)}{Q(\alpha\varepsilon)} = \frac{Q(\alpha\xi)}{Q(\alpha\varepsilon)}\ . \tag{A.70}$$

Pelo teorema de Pitágoras aplicado no triângulo $\alpha\varepsilon\xi$ vem que:

$$Q(\alpha\xi) = Q(\alpha\varepsilon) + Q(\varepsilon\xi)\ . \tag{A.71}$$

Sendo

$$\alpha\varepsilon = \varepsilon\pi\ , \tag{A.72}$$

vem:

$$\frac{\alpha\gamma}{\alpha\varepsilon} = \frac{Q(\varepsilon\xi) + Q(\varepsilon\pi)}{Q(\varepsilon\pi)}\ . \tag{A.73}$$

Esta equação, análoga à Eq. (10.54), é a base matemática necessária para a demonstração física deste Teorema.

## A.7 Teorema IX

Demonstração matemática da Equação (10.100). Os objetos representados neste Teorema aparecem na Figura A.7.

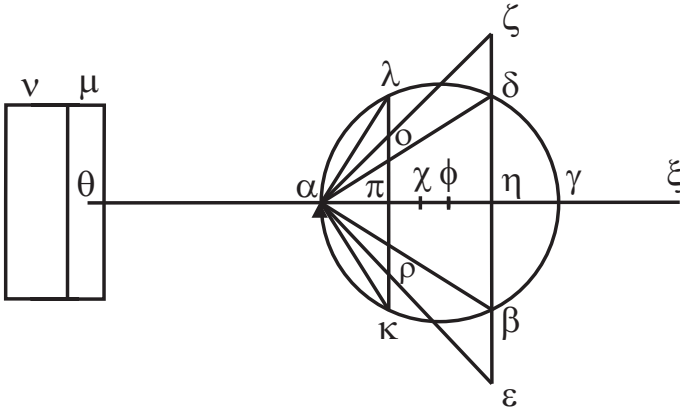



Figura A.7: Representação em corte do segmento esférico, dos cones e cilindros.

Sendo os triângulos $\alpha\gamma\kappa$ e $\alpha\kappa\pi$ semelhantes,[8] temos que:

[8]Ou simplesmente aplicando ao triângulo $\alpha\gamma\kappa$ o Corolário da Proposição 8, Livro VI, da obra *Os Elementos* de Euclides, citado na Subseção 9.3.1, página 67 deste trabalho. Ver ainda [Euc56a, Vol. 2, pág. 210] e [Euc09, pág. 241].

$$\frac{\alpha\gamma}{\alpha\kappa} = \frac{\alpha\kappa}{\alpha\pi} \ . \tag{A.74}$$

A partir deste resultado vem que:

$$\alpha\gamma = \frac{Q(\alpha\kappa)}{\alpha\pi} \ . \tag{A.75}$$

Esta equação também pode ser colocada na seguinte forma:

$$\alpha\gamma \cdot \alpha\gamma = \frac{Q(\alpha\kappa)}{\alpha\pi} \cdot \frac{Q(\alpha\kappa)}{\alpha\pi} \ , \tag{A.76}$$

ou:

$$Q(\alpha\gamma) = \frac{Q(\alpha\kappa) \cdot Q(\alpha\kappa)}{Q(\alpha\pi)} \ . \tag{A.77}$$

A Definição 9 do Livro V de *Os Elementos* de Euclides afirma que:[9]

> E, quando três magnitudes estejam em proporção, a primeira é dita ter para a terceira uma razão dupla da [razão] que [a primeira tem] para a segunda.

Logo, de acordo com a Equação (8.13) da teoria das proporções, temos que se

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} \ , \tag{A.78}$$

então:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \ . \tag{A.79}$$

Aplicando este resultado na Equação (A.74) resulta em:

$$\frac{\alpha\gamma}{\alpha\pi} = \frac{Q(\alpha\gamma)}{Q(\alpha\kappa)} \ . \tag{A.80}$$

Substituindo Q($\alpha\gamma$) pelo seu valor obtido na Equação (A.77), obtemos:

$$\frac{\alpha\gamma}{\alpha\pi} = \frac{Q(\alpha\kappa) \cdot Q(\alpha\kappa)}{Q(\alpha\pi) \cdot Q(\alpha\kappa)} \ . \tag{A.81}$$

Ou então:

$$\frac{\alpha\gamma}{\alpha\pi} = \frac{Q(\alpha\kappa)}{Q(\alpha\pi)} \ . \tag{A.82}$$

Arquimedes usa então a Equação (A.82) como ponto de partida para a demonstração do teorema. Continua também aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo $\alpha\kappa\pi$:

[9]Ver a nota de rodapé 7 do Teorema V na página 192.

$$Q(\alpha\kappa) = Q(\alpha\pi) + Q(\kappa\pi) \ . \tag{A.83}$$

Mas:

$$Q(\alpha\pi) = Q(o\pi) \ , \tag{A.84}$$

pois o triângulo $\alpha o \pi$ é isósceles por construção (semelhante a $\alpha\zeta\eta$). Então:

$$\frac{\alpha\gamma}{\alpha\pi} = \frac{Q(\kappa\pi) + Q(o\pi)}{Q(o\pi)} \ . \tag{A.85}$$

Esta relação, análoga à Equação (10.100), é a base matemática necessária para a demonstração física deste Teorema.

## A.8 Teorema XIV

Para demonstrar a Equação (10.148) do Teorema XIV vamos reproduzir aqui a Figura 10.64 deste Teorema que representa em corte horizontal um paralelepípedo de base quadrada e um cilindro inscrito, os quais aparecem no corte como o quadrado $\alpha\beta\gamma\delta$ e o círculo de centro $\kappa$ e com os pontos de tangência ao quadrado em $\varepsilon\zeta\eta\theta$, Figura A.8.

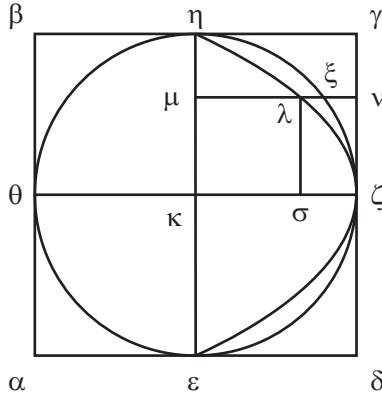



Figura A.8: Construção geométrica do Teorema XIV.

Temos ainda uma parábola passando pelos pontos $\varepsilon\zeta\eta$, bem como os diâmetros perpendiculares $\varepsilon\eta$ e $\zeta\theta$. Também está traçada paralelamente ao diâmetro $\zeta\theta$ a reta $\mu\nu$ que corta a parábola e o círculo nos pontos $\lambda$ e $\xi$, respectivamente. Esta é a figura construída por Arquimedes para resolver o Teorema XIV.

Consideramos inicialmente a equação da parábola $\varepsilon\zeta\eta$, como usada por Arquimedes, Equações (9.10) e (9.14). Esta parábola tem como eixos os segmentos $\zeta\theta$ e $\gamma\zeta$ e chamamos de $p$ o seu parâmetro neste sistema de eixos coordenados.[10]

[10] Já vimos no Capítulo 9 que a constante $p$ foi chamada por Apolônio de *orthia*, sendo modernamente chamada de parâmetro da curva.

A equação desta parábola aplicada ao ponto $\eta$ é a seguinte:

$$Q(\gamma\zeta) = p \cdot (\zeta\kappa) \ , \tag{A.86}$$

ou também:

$$\gamma\zeta \cdot \gamma\zeta = p \cdot \zeta\kappa \ . \tag{A.87}$$

Mas:

$$\gamma\zeta = \zeta\kappa \ , \tag{A.88}$$

sendo lados do mesmo quadrado. Portanto:

$$p = \gamma\zeta \ , \tag{A.89}$$

encontrando assim o parâmetro da parábola.

Consideramos agora uma reta qualquer $\mu\nu$ paralela ao diâmetro $\zeta\kappa$ que encontra a parábola no ponto $\lambda$ e o círculo no ponto $\xi$. Consideramos também a reta $\lambda\sigma$ paralela a $\eta\kappa$.

Teremos então no paralelogramo $\zeta\kappa\mu\nu$ as seguintes igualdades:

$$\kappa\mu = \lambda\sigma = \zeta\nu \ . \tag{A.90}$$

Observamos que por construção também temos:

$$p = \gamma\zeta = \zeta\kappa = \eta\kappa = \gamma\eta = \mu\nu \ . \tag{A.91}$$

Aplicando a equação da parábola ao ponto $\lambda$ vem que:

$$Q(\lambda\sigma) = p \cdot \zeta\sigma \ . \tag{A.92}$$

Mas:

$$\lambda\sigma = \zeta\nu = \kappa\mu \ , \tag{A.93}$$

e

$$\zeta\sigma = \lambda\nu \ , \tag{A.94}$$

de onde:

$$Q(\zeta\nu) = Q(\kappa\mu) = p \cdot \lambda\nu = \mu\nu \cdot \lambda\nu \ . \tag{A.95}$$

Pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo $\kappa\mu\xi$ sabemos que:

$$Q(\kappa\xi) = Q(\kappa\mu) + Q(\mu\xi) \ . \tag{A.96}$$

E sendo $\kappa\xi = \eta\kappa$ por serem raios do mesmo círculo, podemos escrever:

$$Q(\eta\kappa) = Q(\kappa\mu) + Q(\mu\xi) \ , \tag{A.97}$$

ou também:

$$Q(\mu\xi) = Q(\eta\kappa) - Q(\kappa\mu) = Q(\mu\nu) - Q(\kappa\mu) \ . \tag{A.98}$$

Pela equação da parábola $\varepsilon\zeta\eta$ no ponto $\lambda$, Equação (A.95), já vimos que:

$$Q(\lambda\sigma) = Q(\kappa\mu) = \mu\nu \cdot \lambda\nu \ . \tag{A.99}$$

Escrevendo a Equação (A.98) por extenso e usando a Equação (A.99) temos:

$$\mu\xi \cdot \mu\xi = \mu\nu \cdot \mu\nu - \kappa\mu \cdot \kappa\mu = \mu\nu \cdot \mu\nu - \mu\nu \cdot \lambda\nu = \mu\nu \cdot (\mu\nu - \lambda\nu) = \mu\nu \cdot \lambda\mu \ . \tag{A.100}$$

Então podemos escrever:

$$\frac{\mu\nu}{\lambda\mu} = \frac{\mu\nu \cdot \mu\nu}{\lambda\mu \cdot \mu\nu} = \frac{Q(\mu\nu)}{Q(\mu\xi)} \ . \tag{A.101}$$

Esse é o ponto de partida da demonstração do Teorema XIV feita por Arquimedes, Equação (10.148).

# Apêndice B

# A Parábola

## B.1 A Parábola em Coordenadas Cartesianas

Seja dado um sistema de coordenadas cartesianas $(x,\ y)$ com centro $O = (0,\ 0)$. A parábola é definida pelo conjunto dos pontos $P(x,\ y)$ do plano equidistantes de uma reta $r$, chamada de *diretriz*, e de um ponto $F$ não pertencente a $r$, ponto este chamado de *foco* da parábola, Figura B.1.

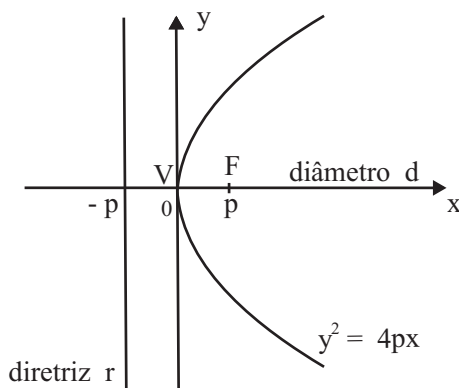



Figura B.1: A parábola $y^2 = 4px$.

A Equação de uma parábola com foco $F = (p,\ 0)$ e reta diretriz $r$ localizada em $x = -p$, Figura B.1, é dada por:[1]

$$y^2 = 4px\ . \tag{B.1}$$

A Equação de uma parábola com foco $F = (0,\ p)$ e reta diretriz $r$ localizada em $y = -p$, é dada por:

[1]Ver [San02, Capítulo 5].

$$x^2 = 4py \ . \tag{B.2}$$

Ela está representada na Figura B.2.

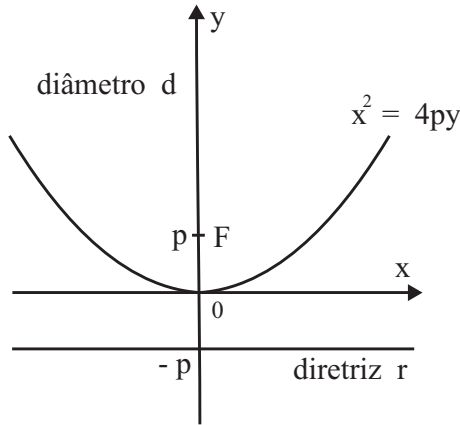



Figura B.2: A parábola $x^2 = 4py$.

## B.2 A Subtangente — Considerações de Arquimedes

No primeiro teorema de *O Método*, Arquimedes considera os segmentos de reta $\beta\delta$ e $\beta\varepsilon$, Figuras 9.3, 11.1 e B.3.

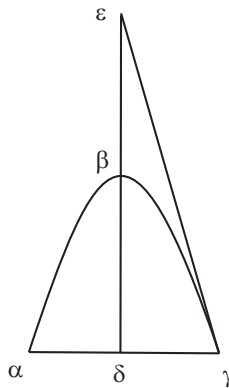



Figura B.3: Parábola $\alpha\beta\gamma$ com tangente $\gamma\varepsilon$.

Ele afirma que estes dois segmentos são iguais, sem demonstrar isto, informando que a demonstração encontra-se nos *Elementos*. O livro *Elementos* a

que Arquimedes se refere aqui não é a obra de geometria de Euclides, já que esta não trata das cônicas. Provavelmente estes *Elementos* se referem a uma obra anterior de Arquimedes, atualmente perdida, que tratava das propriedades básicas ou elementares das seções cônicas.[2] Além disso, e de maneira mais marcante, ele considera em sua obra *Quadratura da Parábola* essa Proposição como um Lema ou como um Teorema que já foi demonstrado em outra obra.[3] Vamos considerar a Figura B.3.

A segunda Proposição da obra *Quadratura da Parábola* de Arquimedes afirma o seguinte:[4]

> Se tivermos uma parábola $\alpha\beta\gamma$, uma reta $\beta\delta$ paralela ao diâmetro ou sendo ela mesma o diâmetro, uma reta $\alpha\delta\gamma$ paralela à tangente à cônica no ponto $\beta$ [vértice da parábola], e uma reta $\gamma\varepsilon$ tangente à cônica no ponto $\gamma$, [então] $\beta\delta$ e $\beta\varepsilon$ serão iguais.

Na Seção B.3 apresentamos uma dedução moderna deste Lema.

## B.3 A Subtangente — Uma Dedução Moderna

Utilizando uma notação algébrica moderna, achamos interessante apresentar aqui uma demonstração do Lema mencionado na Seção B.2. Esta demonstração moderna é atribuída ao matemático francês Pierre de Fermat (1601-1665).[5]

A Equação da parábola, Equação (B.1), pode ser escrita como:

$$x = \frac{y^2}{4p} \ . \tag{B.3}$$

A partir da Figura B.4 podemos escrever $(x_1,\ y_1) = (\beta\delta,\ \gamma\delta)$ e $(x_2,\ y_2) = (\beta\phi,\ \phi\omega)$.

Fazendo estas substituições na Equação (B.3) obtemos:

$$\frac{\beta\delta}{\beta\phi} = \frac{\gamma\delta^2}{\phi\omega^2} \ . \tag{B.4}$$

Sendo o ponto $\psi$ externo à parábola, temos que:

$$\phi\omega < \phi\psi \ . \tag{B.5}$$

Portanto, das Equações (B.4) e (B.5) obtemos a seguinte desigualdade:

$$\frac{\beta\delta}{\beta\phi} > \frac{\gamma\delta^2}{\phi\psi^2} \ . \tag{B.6}$$

Pela semelhança dos triângulos $\gamma\delta\varepsilon$ e $\varepsilon\phi\psi$ temos:

---

[2] [Arq66, págs. 38 e 91, Nota 5].
[3] [Arc02b, pág. 235] e [Mug71a, págs. 166-167].
[4] [Mug71a, págs. 166-167].
[5] [Mal02, pág. 63].

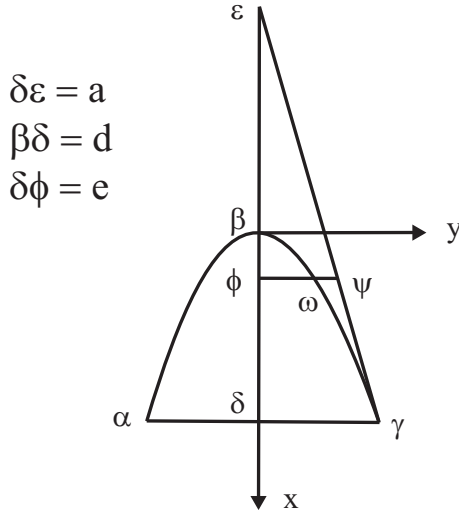



Figura B.4: Sistema de eixos $(x,\ y)$ centrado no vértice $\beta$ da parábola $\alpha\beta\gamma$.

$$\frac{\gamma\delta}{\phi\psi} = \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon\phi} \ . \tag{B.7}$$

Das Equações (B.6) e (B.7) obtém-se então:

$$\frac{\beta\delta}{\beta\phi} > \frac{\delta\varepsilon^2}{\phi\varepsilon^2} \ . \tag{B.8}$$

Para facilitar a leitura da matemática como é usada hoje, chamamos agora $\delta\varepsilon = a$, $\delta\phi = e$, $\beta\delta = d$. Sendo $d$ conhecido pois é definido pelo ponto de tangência $\gamma$, a desigualdade (B.8) pode ser escrita como:

$$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{(a-e)^2} \ . \tag{B.9}$$

A partir desta desigualdade obtemos:

$$da^2 - 2aed + de^2 > da^2 - ea^2 \ . \tag{B.10}$$

Eliminando os termos comuns e dividindo por $e$, temos:

$$-2ad + de > -a^2 \ , \tag{B.11}$$

ou

$$de + a^2 > 2ad \ . \tag{B.12}$$

Fazendo o ponto $\phi$ tender a $\delta$, temos que $e = \delta\phi$ tende a zero, enquanto que a desigualdade (B.12) se torna igualdade, pois o segmento externo à parábola $\omega\psi$ também tende a zero. Podemos então escrever que neste limite:

$$a = 2d \ . \tag{B.13}$$

Ou seja, *a subtangente é dividida em duas partes iguais pelo vértice*, que era o que queríamos demonstrar. Concluímos então com Arquimedes que:

$$\delta\varepsilon = 2\beta\delta \ . \tag{B.14}$$

# Apêndice C

# Uma Propriedade do Triângulo Retângulo

Na demonstração do segundo teorema de *O Método*, Arquimedes simplesmente informa[1] a partir da Figura 11.2, equivalente à Figura 10.10, que o retângulo de lados $\alpha\gamma$ e $\alpha\sigma$ é equivalente ao quadrado de lado $\alpha\xi$, sem nenhum comentário adicional. Esta equivalência refere-se a uma igualdade de áreas, ou seja:

$$\alpha\gamma \cdot \alpha\sigma = \alpha\xi \cdot \alpha\xi \ . \tag{C.1}$$

Por ser usada repetidamente no texto de *O Método*, apresentamos aqui uma dedução que pode ser obtida a partir da obra *Os Elementos* de Euclides. Na Proposição 8 do Livro VI de Euclides demonstra-se que:[2]

> Caso em um triângulo retângulo seja traçada uma perpendicular do ângulo reto até a base, os triângulos junto à perpendicular são semelhantes tanto ao todo quanto entre si.

Reproduzimos na Figura C.1 a parte que nos interessa da Figura 11.2 do segundo teorema de *O Método*.

O círculo $\alpha\beta\gamma$ tem centro $\kappa$. O triângulo $\alpha\xi\gamma$ é retângulo e os segmentos $\beta\kappa$ e $\xi\sigma$ são ortogonais ao diâmetro $\alpha\gamma\kappa$.

A partir desta Figura C.1 e da Proposição 8 do Livro VI de *Os Elementos* de Euclides,[3] concluímos que os triângulos $\alpha\xi\gamma$ e $\alpha\xi\sigma$ são semelhantes. Portanto:

$$\frac{\alpha\gamma}{\alpha\xi} = \frac{\alpha\xi}{\alpha\sigma} \ . \tag{C.2}$$

Ou seja:

$$\alpha\gamma \cdot \alpha\sigma = \alpha\xi \cdot \alpha\xi = (\alpha\xi)^2 \ , \tag{C.3}$$

[1] Ver a página 151 deste trabalho.
[2] [Euc09, pág. 240].
[3] Citada na Subseção 9.3.1.

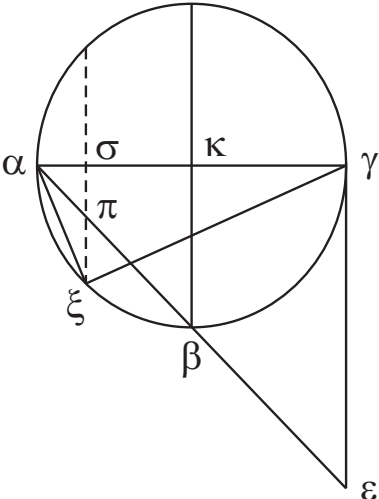



Figura C.1: Triângulo retângulo $\alpha\xi\gamma$ inscrito no círculo $\alpha\beta\gamma$.

que é onde Arquimedes queria chegar.

Além disso é muito usado nas demonstrações de Arquimedes o Corolário da Proposição 8 do Livro VI de *Elementos* de Euclides, segundo o qual:[4]

> A partir disso é claro que, se em um triângulo retângulo, for traçada uma perpendicular a partir do ângulo reto para a base, a [linha reta assim] traçada será uma média proporcional entre os segmentos da base.

Com esse Corolário podemos concluir que:

$$\xi\sigma \cdot \xi\sigma = \alpha\sigma \cdot \gamma\sigma \ . \tag{C.4}$$

[4] [Euc56a, Volume 2, pág. 211].

# Apêndice D

# As Figuras de *O Método*

## D.1 Letras Maiúsculas e Minúsculas

Os tradutores e copiadores das obras de Arquimedes adotaram maneiras diferentes para identificar os vários pontos das figuras: letras gregas maiúsculas (ΑΒΓ...), letras gregas minúsculas ($\alpha\beta\gamma$...) e letras latinas (ABC...).

Nesse livro optamos por usar as letras gregas minúsculas procurando sempre que possível manter a ordem alfabética quando elas são citadas no texto. O principal motivo para essa escolha é que ao lermos em pensamento ou em voz alta, por exemplo, as letras gregas minúsculas $\alpha\beta\gamma$ automaticamente lemos alfa, beta e gama. Por outro lado, ao lermos em pensamento ou em voz alta as letras gregas maiúsculas ΑΒΓ automaticamente lemos A, B e gama, já que a letra alfa maiúscula é idêntica à letra A latina, a letra beta maiúscula é idêntica à letra B latina, o mesmo não acontecendo com as outras letras como Γ. Logo, o texto das proposições acaba ficando um pouco confuso de ler ao utilizarmos letras gregas maiúsculas.

## D.2 Comentários sobre as Figuras dos Teoremas VI e IX

Na tradução de *O Método* bem como na elaboração dos comentários usamos como base a obra de Charles Mugler.[1]

No que diz respeito às figuras, existem discrepâncias entre as figuras dos Teoremas VI e IX de *O Método* nas várias traduções existentes do texto grego. As que utilizamos são as Figuras 11.6 e 11.8, ver nas páginas 161 e 166 deste trabalho. Embora estas figuras sejam diferentes entre si, o ponto que queremos discutir aqui é comum às duas figuras. Vamos então concentrar nossos comentários sobre a figura do Teorema VI, sendo que os mesmos comentários aplicam-se à figura do Teorema IX.

[1] [Mug70], [Mug71a], [Mug71b] e [Mug72].

É interessante mostrar aqui as diferenças encontradas para a mesma figura nas várias traduções e explicar porque, nos comentários que apresentamos na Seção 10.7, resolvemos adotar uma outra apresentação gráfica.

Na representação adotada por Mugler,[2] Figura D.1, $\mu\nu$ indica um cilindro constituído pelos dois cilindros $\mu$ e $\nu$. A mesma representação aparece em Heiberg, Heath, Rufini e Babini.[3]

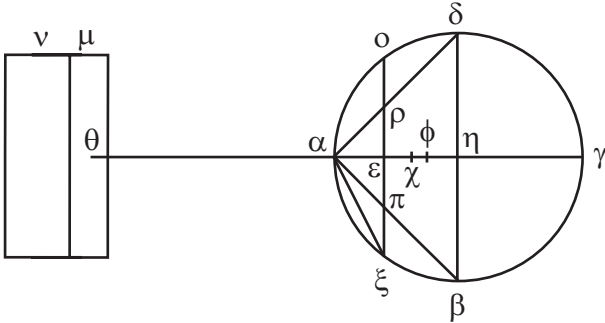



Figura D.1: A figura do Teorema VI na tradução de C. Mugler.

Estes cilindros podem ser separados e, de acordo com a descrição feita por Arquimedes no texto original, cada um dos cilindros $\mu$ e $\nu$ separadamente deveria ter o seu centro de gravidade em $\theta$. Contudo, pelas figuras mostradas nas traduções para o alemão, inglês (por Heath), italiano e espanhol, fica claro que o cilindro $\nu$ não tem o seu centro de gravidade em $\theta$. Isto é contrário ao texto de Arquimedes.

Já na apresentação do mesmo teorema feita por Dijksterhuis encontramos a Figura D.2.[4]

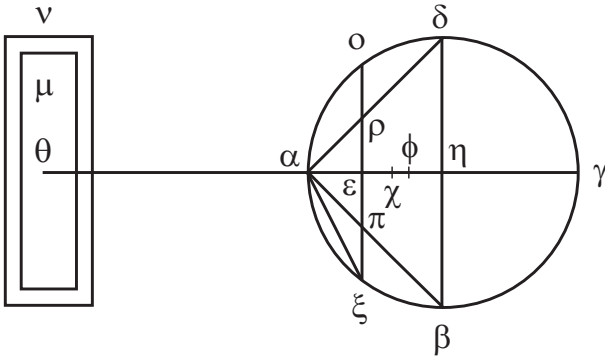



Figura D.2: A figura do Teorema VI na apresentação de E. J. Dijksterhuis.

[2] [Mug71b, pág. 102].
[3] [Arc63, pág. 395], [Arc02a, pág. 28], [Arc61, pág. 131] e [Arq66, pág. 57].
[4] [Arc87, pág. 327].

Fica evidente nesta figura o esforço do tradutor para apresentar corretamente o que está descrito no texto, já que os dois cilindros $\mu$ e $\nu$ possuem seus centros de gravidade no ponto $\theta$.

Nos nossos comentários sobre este Teorema achamos conveniente usar uma outra apresentação gráfica que pudesse simultaneamente respeitar o texto de Arquimedes e mostrar uma imagem que seja fisicamente mais clara, Figura 10.34, reproduzida aqui na Figura D.3.

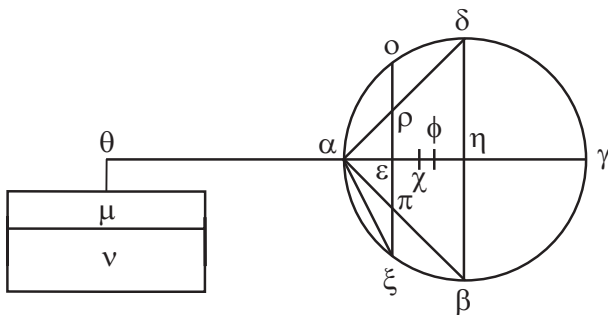



Figura D.3: A figura do Teorema VI apresentada em nosso trabalho.

Para isto aproveitamos a lei da alavanca, extensivamente usada nesse texto, juntamente com o sexto Postulado da obra *Sobre o Equilíbrio dos Planos*.[5] Com efeito, considerando que os cilindros estão em equilíbrio com outros sólidos (o que é demonstrado no texto) então, de acordo com o princípio acima citado, o equilíbrio é mantido mesmo que os corpos sejam suspensos por uma linha vertical passando pelo seus centros de gravidade.[6] Na nossa figura, mantivemos os centros de gravidade dos cilindros $\mu$ e $\nu$ ao longo de uma mesma vertical passando por $\theta$, evitando as representações de Heiberg, Mugler, Heath e Rufini que não são fieis ao texto de Arquimedes.

O mesmo raciocínio vale para a representação da figura do Teorema IX que apresentamos na Seção 10.10.

[5] Ver a discussão deste Postulado na Subseção 7.1.3, página 47 deste trabalho.

[6] Uma ampla discussão sobre este postulado pode ser encontrada no livro *Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca*, [Ass08, pág. 223].

# Apêndice E

# Centro de Gravidade de um Semicírculo

O Teorema XIII de *O Método* pode ser usado para encontrar o centro de gravidade de um semicírculo.[1] Apresentamos a seguir a essência deste cálculo.

Pelas deduções físicas e matemáticas deste teorema, Arquimedes provou que um prisma de base triangular e um semicilindro construídos de acordo com as definições estabelecidas no enunciado do teorema e uniformemente distribuídos ao longo do travessão da alavanca, ficam em equilíbrio. Isto está ilustrado na Figura 10.59, reproduzida abaixo na Figura E.1.

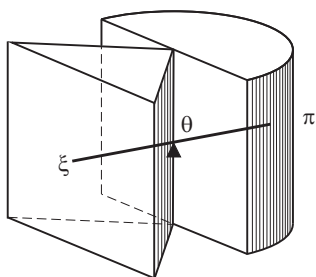



Figura E.1: Prisma de base triangular e semicilindro em equilíbrio na alavanca, de acordo com o Teorema XIII.

Consideramos agora a interseção definida nos dois sólidos por um plano passando pelo travessão da alavanca e paralelo às suas bases. Esta interseção gera um triângulo no prisma e um semicírculo no semicilindro.

[1] [Arc02a, págs. 38-40].

Atribuindo-se às duas figuras planas pesos uniformemente distribuídos, elas estarão em equilíbrio apoiadas uniformemente sobre o travessão da alavanca, como mostrado na Figura E.2.

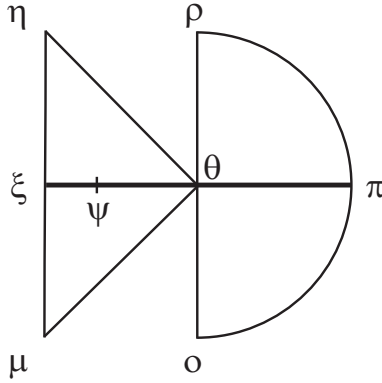



Figura E.2: Triângulo e semicírculo em equilíbrio na alavanca.

Nesta figura está indicado também o ponto $\psi$, centro de gravidade do triângulo, cuja posição é conhecida pelo Lema 5 de *O Método*.[2] No caso da Figura E.2 temos que

$$\frac{\xi\psi}{\theta\xi} = \frac{1}{3} \ . \tag{E.1}$$

Resta agora determinar a posição do centro de gravidade $\chi$ do semicírculo, que por simetria estará sobre o braço $\theta\pi$ do travessão da alavanca.

Pelo sexto postulado da obra *Sobre o Equilíbrio dos Planos*[3] sabemos que a alavanca continuará em equilíbrio se as figuras estiverem apoiadas unicamente pelos seus centros de gravidade, como mostrado pela Figura E.3.

Por meio desta última alavanca em equilíbrio, conhecendo a posição $\psi$ do centro de gravidade do triângulo, podemos determinar o centro de gravidade $\chi$ do semicírculo.

Vamos usar a notação moderna e chamar de $r$ ao raio do semicírculo. Logo o semicírculo e o triângulo terão a mesma base $2r$. Já a altura do triângulo será igual ao raio do semicírculo, $r$.

A distância $\theta\psi$ do centro de gravidade $\psi$ do triângulo ao fulcro $\theta$ será $(2/3)r$ de acordo com a Equação (E.1).

A área $A_t$ do triângulo é dada por:

$$A_t = \frac{2r \cdot r}{2} = r^2 \ . \tag{E.2}$$

Já a área $A_s$ do semicírculo é dada por:

[2]Citado na Seção 10.2, na página 78 deste trabalho.
[3]Citado na Subseção 7.1.3, página 47 deste trabalho.

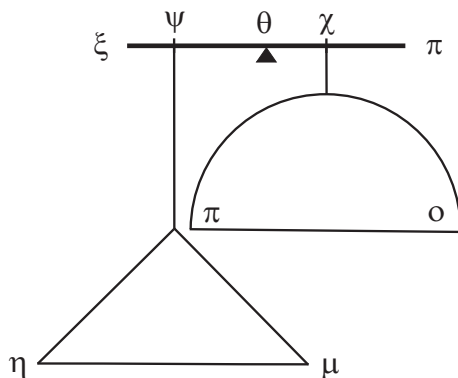



Figura E.3: Triângulo e semicírculo em equilíbrio apoiados nos respectivos centros de gravidade.

$$A_s = \frac{\pi r^2}{2} \ . \tag{E.3}$$

Vamos chamar de $x$ à distância entre o fulcro $\theta$ e o centro de gravidade $\chi$ do semicírculo, a ser determinada. De acordo com a lei da alavanca temos então que:

$$\frac{A_t}{A_s} = \frac{x}{(2/3)r} = \frac{r^2}{(1/2)\pi r^2} \ . \tag{E.4}$$

Portanto:

$$x = \frac{4r}{3\pi} \ . \tag{E.5}$$

Isto completa o cálculo do centro de gravidade do semicírculo.

# Apêndice F

# Cálculo do Centro de Gravidade do Cone Utilizando o Método de Arquimedes

A base desse Capítulo encontra-se em trabalhos dos autores de 2012 e 2016.[1]

No início de sua carta para Eratóstenes contendo os teoremas resolvidos com o método mecânico, Arquimedes citou vários lemas necessários às demonstrações. Muitos destes lemas já tinham sido demonstrados por outros matemáticos e alguns foram deduzidos pelo próprio Arquimedes, mas de um deles em particular não nos chegou nenhuma demonstração dos tempos antigos: trata-se do baricentro de um cone. Como vimos no Capítulo 11, Seção 11.2, Arquimedes diz que:[2]

> O centro de gravidade de todo cone está situado sobre o eixo, dividindo-o de modo que o segmento próximo do vértice seja o triplo do restante.

Não há uma demonstração desse lema em nenhum de seus trabalhos que chegaram até nós, nem mesmo em *O Método*. Wilbur Knorr (1945-1997) apresentou uma prova desse resultado seguindo o raciocínio geométrico de Arquimedes.[3] Em nosso trabalho seguimos um procedimento diferente, a saber, uma demonstração física do centro de gravidade do cone utilizando o método mecânico de Arquimedes descrito nesse livro.

Lembramos aqui a lei da alavanca que é a base do método de Arquimedes e que foi amplamente discutida na Seção 7.2 com a Figura 7.3 e a Equação correspondente (7.1).

[1] [MA12] e [AM16, Apêndice A].
[2] [Mag11, pág. 107], [Arc02b] e [Arc71, pág. 85].
[3] [Kno79a].

## F.1 As Deduções Matemáticas

A demonstração do centro de gravidade do cone delineada aqui é similar à segunda proposição do trabalho que Arquimedes enviou para Eratóstenes, *O Método dos Teoremas Mecânicos*. Nesta proposição ele provou que o volume de qualquer esfera é igual a quatro vezes o volume do cone que tem sua base igual ao círculo máximo da esfera e sua altura igual ao raio da esfera. Provou também que o volume do cilindro que tem sua base igual ao círculo máximo da esfera e sua altura igual ao diâmetro da esfera é igual a uma vez e meia o volume da esfera.

O mesmo método físico é aplicado nesse caso para o cálculo do centro de gravidade do cone. A Figura F.1 utilizada aqui é uma versão simplificada da figura da segunda proposição mencionada no parágrafo anterior.

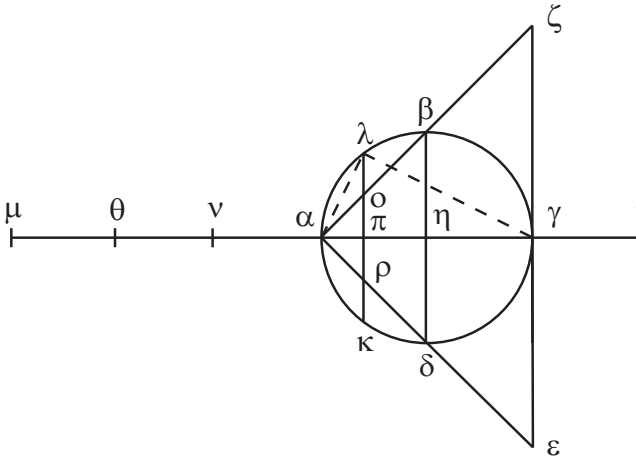



Figura F.1: Uma esfera e um cone vistos em corte lateral.

Na Figura F.1 seja $\alpha\beta\gamma\delta$ o círculo máximo da esfera, sejam $\alpha\gamma$ e $\beta\delta$ dois de seus diâmetros perpendiculares entre si cruzando-se no ponto $\eta$, que é o centro da esfera. Considere o cone com vértice em $\alpha$, cuja base é o círculo máximo no plano passando por $\beta\delta$ e perpendicular a $\alpha\gamma$. A superfície estendida desse cone intersecta o plano passando por $\gamma$ e perpendicular a $\alpha\gamma$ em um círculo que tem $\varepsilon\zeta$ como diâmetro. Traçamos um plano variável $\kappa\lambda$ perpendicular ao segmento $\alpha\gamma$ que o intercepta no ponto $\pi$. Esse plano também intercepta o cone e a esfera nos círculos cujos diâmetros são $o\rho$ e $\kappa\lambda$, respectivamente. O segmento $\alpha\gamma$ é estendido para a esquerda até $\mu$, passando pelos pontos $\nu$ e $\theta$. Este segmento também é estendido para a direita até o ponto $\iota$, sendo esses pontos escolhidos de tal maneira que $\theta\mu = \theta\nu = \alpha\nu = \alpha\eta = \gamma\eta = \gamma\iota$. Ou seja, todos esses segmentos são iguais ao raio da esfera. Além disso, traçamos os segmentos $\alpha\lambda$ e $\lambda\gamma$, obtendo assim o triângulo retângulo $\alpha\gamma\lambda$.

Já na Figura F.2 temos a esfera e o cone da Figura F.1 vistos em perspectiva.

O método para o cálculo do centro de gravidade do cone começa obtendo

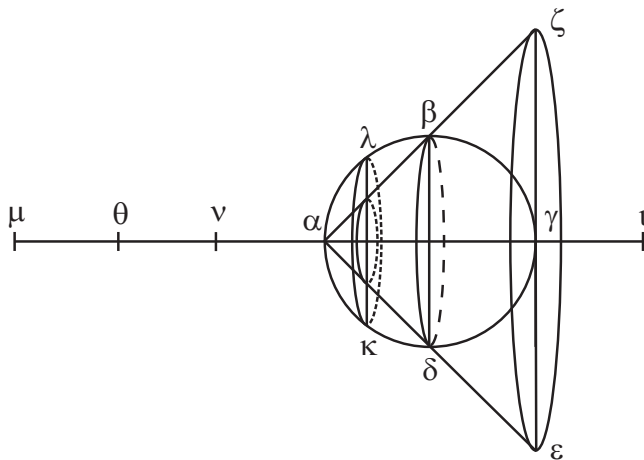



Figura F.2: Uma esfera e um cone vistos em perspectiva.

uma relação matemática simples a partir da Figura F.1. Pela semelhança dos triângulos $\alpha\lambda\pi$ e $\alpha\gamma\lambda$ temos que:

$$\frac{\alpha\gamma}{\alpha\lambda} = \frac{\alpha\lambda}{\alpha\pi} \,, \tag{F.1}$$

ou:

$$\alpha\gamma = \frac{\alpha\lambda \cdot \alpha\lambda}{\alpha\pi} \,. \tag{F.2}$$

A Equação (F.2) também é equivalente a:

$$\frac{\alpha\gamma}{\alpha\pi} = \frac{\alpha\lambda \cdot \alpha\lambda}{\alpha\pi \cdot \alpha\pi} \,. \tag{F.3}$$

Um quadrado com lado $\alpha\lambda$ será representado aqui por $\alpha\lambda \cdot \alpha\lambda$. Analogamente, quadrados com lados $\alpha\pi$ e $\lambda\pi$ serão representados por $\alpha\pi \cdot \alpha\pi$ e $\lambda\pi \cdot \lambda\pi$, respectivamente. Pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo $\alpha\lambda\pi$ da Figura F.1 temos que:

$$\alpha\lambda \cdot \alpha\lambda = \alpha\pi \cdot \alpha\pi + \lambda\pi \cdot \lambda\pi \,. \tag{F.4}$$

Substituindo a Equação (F.4) na Equação (F.3) obtém-se:

$$\frac{\alpha\gamma}{\alpha\pi} = \frac{\alpha\pi \cdot \alpha\pi + \lambda\pi \cdot \lambda\pi}{\alpha\pi \cdot \alpha\pi} \,. \tag{F.5}$$

Pela construção da Figura F.1, temos que $\alpha\theta = \alpha\gamma$. O triângulo $\alpha o\pi$ da Figura F.1 é isósceles. Portanto, $\alpha\pi = o\pi$. Utilizando essas duas relações nos lados esquerdo e direito da Equação (F.5), respectivamente, obtém-se:

$$\frac{\alpha\theta}{\alpha\pi} = \frac{o\pi \cdot o\pi + \lambda\pi \cdot \lambda\pi}{o\pi \cdot o\pi} \,. \tag{F.6}$$

A área de um círculo é proporcional ao quadrado de seu raio, ou ao quadrado de seu diâmetro. Portanto, a Equação (F.6) também pode ser expressa da seguinte forma:

$$\frac{\alpha\theta}{\alpha\pi} = \frac{(\textit{área do círculo de diâmetro } o\rho) + (\textit{área do círculo de diâmetro } \kappa\lambda)}{\textit{área do círculo de diâmetro } o\rho} . \tag{F.7}$$

Esta equação é a relação matemática básica necessária para a aplicação do método físico para o cálculo do centro de gravidade do cone, pois corresponde à equação de uma alavanca em equilíbrio.

## F.2 As Deduções Físicas

Considere então $\mu\iota$ como sendo uma alavanca com fulcro localizado no ponto $\alpha$. Suponha figuras geométricas com pesos distribuídos uniformemente, isto é, com pesos proporcionais às áreas das figuras. Como visto anteriormente, uma alavanca em equilíbrio satisfaz à Equação (7.1), que é similar à Equação (F.7). Isso significa que os círculos $\kappa\lambda$ e $o\rho$, permanecendo onde estão, com seus centros atuando sobre a alavanca no ponto $\pi$, equilibram o círculo $o\rho$ com seu centro localizado no ponto $\theta$. Essa situação de equilíbrio está representada na Figura F.3.

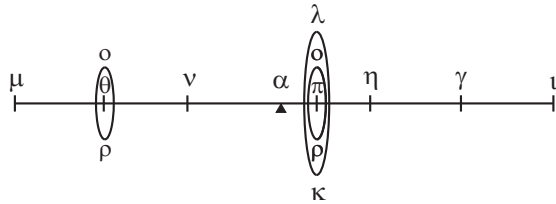



Figura F.3: Alavanca em equilíbrio com os círculos agindo sobre a alavanca através de seus centros de gravidade.

A Figura F.4 apresenta a mesma situação com os círculos suspensos por fios sem peso, estando os centros de gravidade dos círculos localizados verticalmente abaixo dos pontos de suspensão.

Esse equilíbrio ocorre qualquer que seja a localização do plano variável $\kappa\lambda$ entre os pontos $\alpha$ e $\gamma$. Ao considerar em conjunto todos esses planos, com a distância $\alpha\pi$ indo de um valor nulo até o valor $\alpha\gamma$, os círculos $\kappa\lambda$ vão preencher a esfera $\alpha\beta\gamma\delta$, enquanto que os círculos $o\rho$ vão preencher o cone $\alpha\varepsilon\zeta$. Consequentemente, pela Equação (F.7), também vai haver equilíbrio entre a esfera $\alpha\beta\gamma\delta$ e o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ distribuídos ao longo de um braço da alavanca, permanecendo onde se encontram, juntamente com um outro cone $\alpha\varepsilon\zeta$ agindo na alavanca apenas pelo ponto $\theta$. Essa situação de equilíbrio está representada na Figura F.5 com o segundo cone $\alpha\varepsilon\zeta$ suspenso através de um fio sem peso preso no ponto $\theta$, de tal maneira que o centro de gravidade do cone esteja verticalmente abaixo de $\theta$.

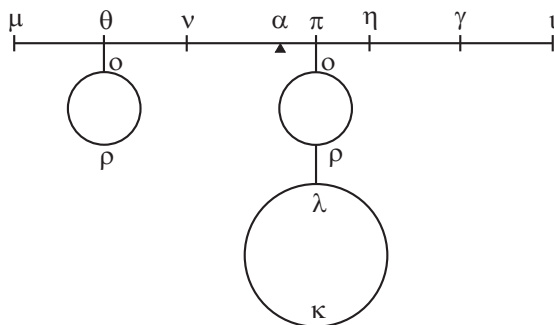



Figura F.4: Alavanca em equilíbrio com os círculos suspensos por fios sem peso.

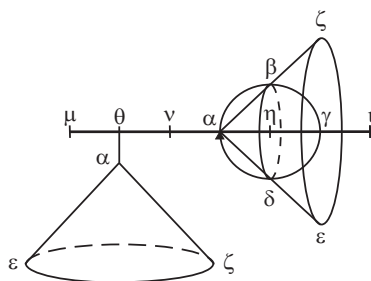



Figura F.5: Há um cone suspenso pelo ponto $\theta$, enquanto que a esfera e um outro cone estão distribuídos ao longo do outro braço da alavanca.

Pelo sexto postulado da obra *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, citado na Subseção 7.1.3, ainda vai continuar havendo equilíbrio da alavanca quando a esfera for suspensa apenas por seu centro de gravidade, isto é, por seu centro $\eta$, como ilustrado na Figura F.6.

Na segunda proposição de sua obra *O Métodos dos Teoremas Mecânicos*, Arquimedes provou que o volume da esfera $\alpha\beta\gamma\delta$ da Figura F.1 é igual a quatro vezes o volume do cone $\alpha\beta\delta$, ou seja:

$$\text{esfera } \alpha\beta\gamma\delta = 4\,(\text{cone } \alpha\beta\delta)\ . \tag{F.8}$$

O volume do cone $\alpha\varepsilon\zeta$ é igual a oito vezes o volume do cone $\alpha\beta\delta$ que tem a metade da altura do primeiro cone, enquanto que o diâmetro $\zeta\varepsilon$ é o dobro do diâmetro $\beta\delta$:

$$\text{cone } \alpha\varepsilon\zeta = 8\,(\text{cone } \alpha\beta\delta)\ . \tag{F.9}$$

Logo, vai continuar havendo equilíbrio da alavanca ao substituir na Figura F.6 a esfera por quatro cones $\alpha\beta\delta$ e ao substituir o grande cone suspenso em $\theta$ por oito cones $\alpha\beta\delta$ suspensos no mesmo ponto $\theta$, como mostrado na Figura F.7.

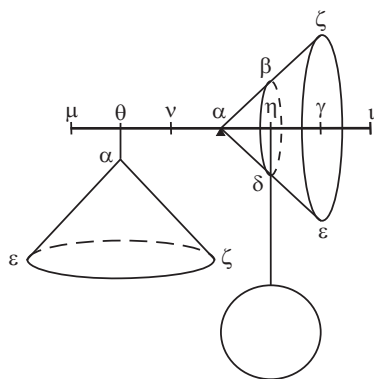



Figura F.6: A esfera da Figura F.5 está agora suspensa pelo ponto $\eta$ por um fio sem peso.

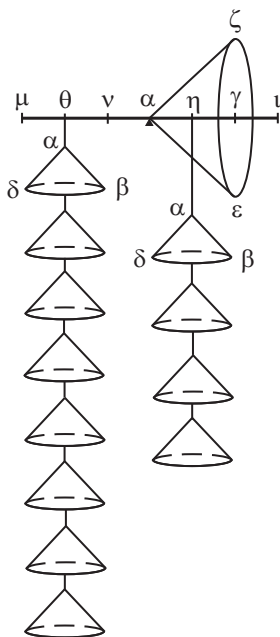



Figura F.7: A esfera da Figura F.6 foi substituída por quatro cones $\alpha\beta\delta$, enquanto que o grande cone atuando no ponto $\theta$ foi substituído por oito cones $\alpha\beta\delta$.

Na quarta proposição da obra *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Arquimedes provou que:[4]

> Se duas grandezas iguais não possuem o mesmo centro de gravidade, o centro de gravidade da grandeza composta por estas [duas] grandezas

[4] [Arc02b], [Ass08, pág. 224] e [Ass11, pág. 215].

estará no ponto médio do segmento de reta ligando os centros de gravidade das [duas] grandezas.

Por "grandezas iguais" deve-se entender grandezas de mesmo peso. Um exemplo de duas grandezas que possuem o mesmo centro de gravidade, ou cujos centros de gravidade coincidem espacialmente, é o caso de um círculo e de um quadrado concêntricos. Por outro lado, caso e círculo e o quadrado estejam lado a lado no mesmo plano, eles não possuirão o mesmo centro de gravidade, estando esses centros de gravidade separados espacialmente.

O significado dessa quarta proposição da obra *Sobre o Equilíbrio dos Planos* é que podemos substituir na Figura F.7 os oito cones $\alpha\beta\delta$ atuando no ponto $\theta$ por quatro cones $\alpha\beta\delta$ atuando no ponto $\mu$, juntamente com quatro cones $\alpha\beta\delta$ atuando no ponto $\nu$, sem que o equilíbrio da alavanca seja perturbado por essa substituição, já que os pontos $\mu$ e $\nu$ estão igualmente espaçados do ponto $\theta$, como indicado na Figura F.8.

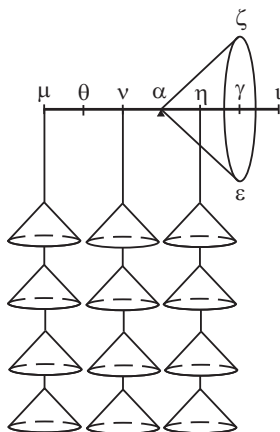



Figura F.8: Os oito cones atuando no ponto $\theta$ da Figura F.7 foram substituídos por quatro cones atuando no ponto $\mu$, juntamente com outros quatro cones atuando no ponto $\nu$.

A alavanca vai continuar em equilíbrio ao remover simultaneamente os quatro cones $\alpha\beta\delta$ agindo no ponto $\nu$ e os quatro cones $\alpha\beta\delta$ agindo no ponto $\eta$, já que $\alpha\nu = \alpha\eta$, Figura F.9.

Pelo sexto postulado da obra *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, o equilíbrio da alavanca da Figura F.9 não será perturbado ao substituir o cone $\alpha\varepsilon\zeta$ distribuído ao longo do braço da alavanca por um outro cone $\alpha\varepsilon\zeta$ de peso igual, mas agindo sobre a alavanca apenas em seu centro de gravidade $\xi$. Nosso objetivo é o de encontrar o valor da distância $\alpha\xi$. Esse equilíbrio está representado na Figura F.10, com o cone suspenso pelo ponto $\xi$ através de um fio sem peso.

De acordo com a lei da alavanca, Equação (7.1), temos então:

$$\frac{4\,(\text{cone } \alpha\beta\delta)}{\text{cone } \alpha\varepsilon\zeta} = \frac{\alpha\xi}{\alpha\mu} \,. \tag{F.10}$$

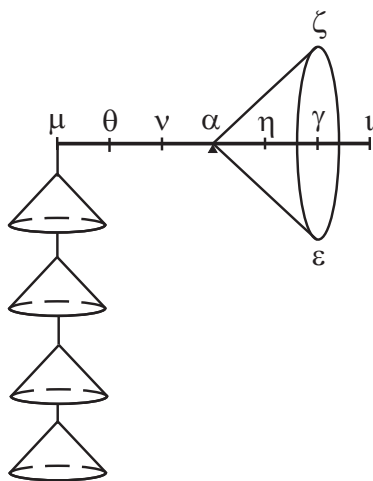



Figura F.9: O equilíbrio da alavanca da Figura F.8 não é perturbado ao remover simultaneamente os quatro cones atuando em $\nu$ e os quatro cones atuando em $\eta$.

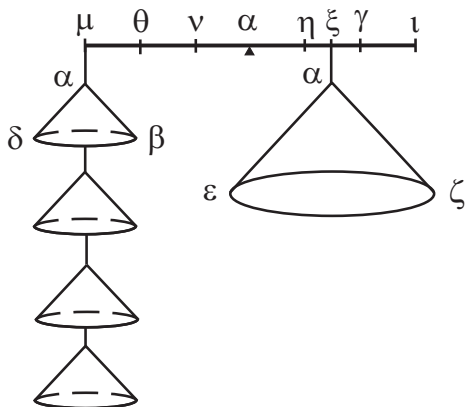



Figura F.10: O equilíbrio da alavanca da Figura F.9 não é perturbado ao substituir o cone distribuído ao longo de um braço da alavanca pelo mesmo cone atuando na alavanca apenas através de seu centro de gravidade localizado no ponto $\xi$.

Pela construção da Figura F.1 temos que:

$$\frac{\alpha\mu}{\alpha\gamma} = \frac{3}{2} \ . \tag{F.11}$$

Ao combinar as Equações (F.9), (F.10) e (F.11) obtemos:

$$\frac{1}{2} = \frac{\alpha\xi}{(3/2)\alpha\gamma} \ . \tag{F.12}$$

Isto é:

$$\alpha\xi = \frac{3}{4}\alpha\gamma \ . \tag{F.13}$$

Este é o resultado final que foi expresso por Arquimedes nas seguintes palavras:[5]

> O centro de gravidade de todo cone está situado sobre o eixo, dividindo-o de modo que o segmento próximo do vértice seja o triplo do restante.

## F.3 A Essência do Método de Arquimedes

Lembramos aqui os pontos essenciais do Método de Arquimedes:

1. A partir de considerações geométricas podemos obter uma proporção igualando duas razões. De um lado da proporção temos uma razão de duas distâncias. Do outro lado da proporção temos uma razão de comprimentos pertencendo a certas figuras, ou uma razão de áreas pertencendo a certas figuras, como ocorreu na Equação (F.7).

2. Assume-se que o peso esteja distribuído uniformemente nas figuras geométricas. Em particular, o peso de cada figura será proporcional ao seu comprimento, área ou volume.

3. Imagina-se então que essas grandezas estejam suspensas em uma alavanca que está em equilíbrio, parada em relação ao solo, seguindo a relação dada pela Equação (7.1). A configuração da alavanca em equilíbrio está representada nas Figuras F.3 e F.4.

4. Cada figura plana é considerada como sendo preenchida por todos os segmentos de reta contidos nela, segmentos paralelos a uma certa direção. Analogamente, cada figura sólida é considerada como sendo composta por todas as seções planas contidas nela, sendo todos esses segmentos ortogonais a uma certa direção espacial.

5. Essa análise produz uma alavanca em equilíbrio possuindo um ou mais corpos suspensos em uma braço da alavanca através de seus centros de gravidade, enquanto que outros corpos ficam distribuídos ao longo do segundo braço da alavanca. Essa configuração está representada na Figura F.5.

6. Ao utilizar o sexto postulado fundamental de seu trabalho *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, citado na Subseção 7.1.3, Arquimedes podia então substituir os corpos distribuídos ao longo do segundo braço da alavanca por outros corpos de mesmo peso que estavam suspensos apenas por seus centros de gravidade. Esse sexto postulado garante que a alavanca vai continuar em equilíbrio em relação ao solo ao ser feita essa substituição. Essas

[5] Ver [Arc02b] e Lema 10 na página 108.

novas configurações de equilíbrio estão representadas aqui pelas Figuras F.6 e F.10.

7. Finalmente, a utilização da lei da alavanca dada pela Equação (7.1) vai fornecer a área, volume ou centro de gravidade da figura geométrica que está sendo investigada quando for conhecida a área, volume ou centro de gravidade de uma outra figura.

## F.4 Valor Pedagógico dessa Análise

A carta de Arquimedes endereçada a Eratóstenes, *O Método dos Teoremas Mecânicos*, pode ser considerada um dos trabalhos mais antigos de física matemática. Ela utiliza a lei física da alavanca para calcular a área, o volume ou o centro de gravidade de diversos corpos. Nosso trabalho ilustra esse método ao utilizá-lo para calcular o centro de gravidade do cone. Embora Arquimedes tenha calculado corretamente o centro de gravidade do cone, como apresentado em um dos lemas de sua carta para Eratóstenes, sua demonstração não chegou até nós. O que fizemos aqui foi utilizar o método de Arquimedes com o objetivo de obter uma demonstração desse lema utilizando a análise física que distingue seu trabalho. O método de Arquimedes é diferente de outros procedimentos que utilizam apenas um raciocínio matemático, sem utilizar uma base física (como a lei da alavanca) para chegar ao resultado final. A análise apresentada aqui, concentrando-se nos aspectos principais do método de Arquimedes, pode ajudar a ilustrar o poder de seu raciocínio. As figuras apresentadas em nossa demonstração têm o objetivo de tornar o método mais intuitivo de um ponto de vista físico.

Nessa demonstração é utilizada uma alavanca física para cancelar e para redistribuir grandezas de pesos iguais que estão em equilíbrio. Ao pensar na construção da alavanca em analogia com operações algébricas, os estudantes podem desenvolver sua compreensão de como métodos e demonstrações matemáticas podem interpretar ou representar comportamentos físicos. Há um grande potencial educacional nessa analogia que pode ser explorada por professores universitários de física.

Também é possível utilizar demonstrações físicas para acompanhar essa análise. De fato, pode-se construir balanças e alavancas em equilíbrio reproduzindo os passos que levam aos teoremas 1 e 2 do método de Arquimedes (a saber, cálculo da área de uma parábola e do volume de uma esfera).[6] Com esse fim podem ser utilizados arames de comprimentos apropriados, lâminas planas feitas de borracha dura de formato triangular e parabólico, juntamente com esferas, cones e cilindros feitos de gesso. Todos esses corpos pesados devem possuir comprimentos, áreas e volumes de acordo com os valores apresentados por Arquimedes. Dessa forma, quando esses corpos são suspensos nas distâncias apropriadas do fulcro da alavanca, esta alavanca permanece em equilíbrio, parada em relação ao solo. Essas demonstrações físicas de alavancas em equilíbrio

[6] [Sec10].

podem acompanhar as provas geométricas desses teoremas, justificando e fortalecendo o incrível raciocínio de Arquimedes utilizado em seu método.

As vantagens educacionais de utilizar propriedades físicas nesse argumento são evidentes nas figuras utilizadas em nosso trabalho, já que a matemática é mantida em nível mínimo. As propriedades físicas da alavanca em equilíbrio, juntamente com o crucial sexto postulado de seu trabalho *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, são a chave para resolver um problema matemático, como ilustrado nesse trabalho.

# Referências Bibliográficas


[AM12] A. K. T. Assis and C. P. Magnaghi. *The Illustrated Method of Archimedes: Utilizing the Law of the Lever to Calculate Areas, Volumes and Centers of Gravity*. Apeiron, Montreal, 2012. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[AM14] A. K. T. Assis and C. P. Magnaghi. *O Método Ilustrado de Arquimedes: Utilizando a Lei da Alavanca para Calcular Áreas, Volumes e Centros de Gravidade*. Apeiron, Montreal, 2014. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[AM16] A. K. T. Assis and C. P. Magnaghi. *Il Metodo Illustrato di Archimede: Usando la Legge della Leva per Calcolare Aree, Volumi e Centri di Gravità*. Apeiron, Montreal, 2016. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Apo04] Apollonius. *Treatise on Conic Sections*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004. Traduzido e editado em notação moderna por T. L. Heath. Reimpressão da edição de 1896.

[Arc09] Archimedes. *Geometrical Solutions Derived from Mechanics*. Open Court, Chicago, 1909. Traduzido do grego para o alemão por J. L. Heiberg, versão em inglês a partir da tradução em alemão por L. G. Robinson. Introdução de D. E. Smith.

[Arc61] Archimede. Metodo sui teoremi meccanici: Archimede ad Eratostene. In E. Rufini, editor, *Il "Metodo" di Archimede e le Origini del Calcolo Infinitesimale nell'Antichità*, pages 101–179. Feltrinelli, Milano, 1961. Traduzido por E. Rufini.

[Arc63] Archimedes. Der Archimedes Methodenlehre von den mechanischen Lehrsätzen. In A. Czwalina, editor, *Archimedes Werke*, pages 379–423. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1963. Traduzido por J. L. Heiberg e comentado por H. G. Zeuthen.

[Arc71] Archimède. La Méthode. In C. Mugler, editor, *Archimède*, volume III, pages 78–127. Société d'Édition "Les Belles Lettres", Paris, 1971. Traduzido por C. Mugler.

[Arc87] Archimedes. The Method of Mechanical Theorems. In E. J. Dijksterhuis, editor, *Archimedes*, chapter X, pages 313–345. Princeton University Press, Princeton, 1987. Traduzido por C. Dikshoorn.

[Arc02a] Archimedes. The Method of Archimedes. In T. L. Heath, editor, *The Works of Archimedes*, pages 1–51 (Supplement). Dover, New York, 2002. Traduzido por T. L. Heath.

[Arc02b] Archimedes. *The Works of Archimedes*. Dover, New York, 2002. Traduzido e editado em notação moderna por T. L. Heath.

[Arc11a] Archimedes. In J. L. Heiberg, editor, *Archimedis Opera Omnia: Cum comentariis Eutocii*, volume I. De Gruyter, 2011. Revisado por E. S. Stamatis. Série: Bibliotheca scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana.

[Arc11b] Archimedes. In J. L. Heiberg, editor, *Archimedis Opera Omnia: Cum comentariis Eutocii*, volume II. De Gruyter, 2011. Revisado por E. S. Stamatis. Série: Bibliotheca scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana.

[Arc11c] Archimedes. De mechanicis propositionibus ad Eratosthenem methodus. In J. L. Heiberg, editor, *Archimedis Opera Omnia: Cum comentariis Eutocii*, volume II, pages 425–507. De Gruyter, 2011. Revisado por E. S. Stamatis. Série: Bibliotheca scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana.

[Arc14] Archimede. *Metodo: Nel laboratorio del genio*. Bollati Boringhieri, Torino, 2014. A cura di F. Acerbi, C. Fontanari e M. Guardini.

[Arq] Arquimedes. Contador de areia. Tradução de O. Pombo, A. S. L. N. Leal, E. P. Pereira e S. C. P. Rosa. Disponível em http://webpages.fc.ul.pt/~ommartins/seminario/contadorareia/index.htm.

[Arq66] Arquimedes. *El "Método"*. Editorial Universitaria de Buenos Aires, Buenos Aires, 1966. Tradução de C. R. d. Sadosky. Introdução e notas de J. Babini.

[Arq86] Arquímedes. *El Método*. Alianza Editorial, Madrid, 1986. Tradução de M. L. Puertas e L. Vega. Introdução e Notas de L. Vega.

[Arq04a] Arquimedes, 2004. O método por Arquimedes relativo às investigações mecânicas à Eratóstenes. Tradução de I. F. Balieiro Filho, em: *Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya—Quatro Episódios da História da Heurística*, Anexo. Tese de Doutorado, Unesp, Rio Claro.

[Arq04b] Arquimedes. Sobre o equilíbrio dos planos (segunda parte). *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 2:146–157, 2004. Introdução e tradução de A. K. T. Assis e N. B. F. Campos.

[Arq08] Arquimedes, 2008. "Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas." In: A. K. T. Assis, *Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca* (Apeiron, Montreal), págs. 222-240. Tradução de A. K. T. Assis. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Arq12] Arquimedes. Sobre os corpos flutuantes (segunda parte). *Revista Brasileira de História da Ciência*, 5:369–397, 2012. Tradução de A. K. T. Assis e N. B. F. Campos.

[Arq14] Arquimedes, 2014. Sobre os [corpos] incidentes em líquidos, com os comentários de Francisco de Melo. In *Obras Matemáticas de Francisco de Melo*, Vol. 1: Edição crítica e tradução, Editado por B. Mota e H. Leitão (Biblioteca Nacional de Portugal, Lisboa), págs. 472-505.

[Ass96] A. K. T. Assis. Sobre os corpos flutuantes — tradução comentada de um texto de Arquimedes. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 16:69–80, 1996.

[Ass97] A. K. T. Assis. Sobre o equilíbrio dos planos — tradução comentada de um texto de Arquimedes. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 18:81–94, 1997.

[Ass08] A. K. T. Assis. *Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca*. Apeiron, Montreal, 2008. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Ass10] A. K. T. Assis. *Archimedes, the Center of Gravity, and the First Law of Mechanics: The Law of the Lever*. Apeiron, Montreal, 2010. Segunda edição. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Ass11] A. K. T. Assis. *Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2011.

[Cica] Cicero. *De Re Publica*. Disponível em: www.thelatinlibrary.com.

[Cicb] Cicero. *Tusculanae Disputationes*. Disponível em: www.thelatinlibrary.com.

[Did49] D. Diderot. *Lettre sur les Aveugles, a l'usage de ceux qui voyent*. London, 1749.

[Did75] D. Diderot. Lettre sur les aveugles à l'usage de ceux qui voient. In J. Assézat, editor, *Ouvres Complètes de Diderot*, volume I, pages 279–342. Garnier Frères, Paris, 1875.

[Dij87] E. J. Dijksterhuis. *Archimedes*. Princeton University Press, Princeton, 1987. Traduzido por C. Dikshoorn.

[Euc56a] Euclid. *The Thirteen Books of The Elements*, volume 1-3, Livros I-XIII. Dover, New York, 1956. Traduzido com introdução e comentários por Sir Thomas L. Heath.

[Euc56b] Euclid. *The Thirteen Books of The Elements*, volume 3, Livros X-XIII. Dover, New York, 1956. Traduzido com introdução e comentários por Sir Thomas L. Heath.

[Euc08] Euclid. *Euclid's Elements of Geometry*. Richard Fitzpatrick, Austin, 2008. Editado com uma tradução moderna para o inglês por R. Fitzpatrick. Edição corrigida e revisada. Disponível em http://farside.ph.utexas.edu/.

[Euc09] Euclides. *Os Elementos*. Editora da Unesp, São Paulo, 2009. Tradução e introdução de I. Bicudo.

[Fon14] C. Fontanari. Prefazione: La rivoluzione copernicana del Metodo di Archimede. In F. Acerbi, C. Fontanari, and M. Guardini, editors, *Archimede — Metodo: Nel laboratorio del genio*, pages 7–16. Bollati Boringhieri, Torino, 2014.

[Gar07] G. G. Garbi. *A Rainha das Ciências*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2007. $2^a$ edição.

[Gey06] M. Geymonat. *Il Grande Archimede*. Sandro Teti, Roma, 2nd edition, 2006.

[Hay94] E. Hayashi. A reconstruction of the proof of proposition 11 in Archimedes's Method: proofs about the volume and the center of gravity of any segment of an obtuse-angled conoid. *Historia Scientiarum*, 3-3:215–230, 1994.

[Hea81a] T. L. Heath. *A History of Greek Mathematics*, volume I: From Thales to Euclid. Dover, New York, 1981.

[Hea81b] T. L. Heath. *A History of Greek Mathematics*, volume II: From Aristarchus to Diophantus. Dover, New York, 1981.

[Hei15] J. L. Heiberg. *Archimedis Opera*. Teubner, Leipzig, 1910-15. Segunda edição. 3 volumes. Reimpresso em 1972. Stuttgart.

[Hei81] J. L. Heiberg. *Archimedis Opera*. Teubner, Leipzig, 1880-81.

[Hei07] J. L. Heiberg. Eine neue Archimedeshandschrift. *Hermes*, 42:234–303, 1907.

[Hir09] A. Hirshfeld. *Eureka Man: The Life and Legacy of Archimedes*. Walker & Company, New York, 2009.

[HZ07] J. L. Heiberg and H. G. Zeuthen. Eine neue Schrift des Archimedes. *Bibliotheca Mathematica*, 7:321–363, 1907. Reimpresso em *Archimedes Werke*, A. Czwalina (editor), (Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1963), págs. 379-423.

[Jul15] V. Jullien. Archimedes and indivisibles. In V. Jullien, editor, *Seventeenth-Century Indivisibles Revisited*, pages 451–457. Birkhäuser, Heidelberg, 2015. Science Networks. Historical Studies, Volume 49.

[Kno00] E. Knobloch. Archimedes, Kepler, and Guldin: the role of proof and analogy. In R. Thiele, editor, *Mathesis: Festschrift zum siebzigsten Geburtstag von Matthias Schramm*, pages 82–100. Diepholz, Berlin, 2000.

[Kno16] E. Knobloch. From Archimedes to Kepler: analogies and the dignity of mathematics. *Sciences and Techniques in Perspective*, 18:21–34, 2016. IIe série, fasc. 2.

[Kno79a] W. Knorr. Archimedes' lost treatise on the centers of gravity of solids. *Mathematical Intelligencer*, 1:102–109, 1978-79.

[Kno79b] W. R. Knorr. Archimedes and the elements: proposal for a revised chronological ordering of the Archimedean corpus. *Archive for the History of Exact Sciences*, 19:211–290, 1978-79.

[Low11] J. Lowden. The strange and eventful history of the Archimedes palimpsest. In R. Netz, W. Noel, N. Tchernetska, and N. Wilson, editors, *The Archimedes Palimpsest*, volume 1: Catalogue and Commentary, pages 97–117. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[MA12] C. P. Magnaghi and A. K. T. Assis. Calculation of the centre of gravity of the cone utilizing the method of Archimedes. *European Journal of Physics*, 33:637–646, 2012. doi: 10.1088/0143-0807/33/3/637.

[Mac76] E. Mach. *Knowledge and Error - Sketches on the Psychology of Enquiry*. D. Reidel, Dordrecht, 1976. Traduzido por T. J. McCormack.

[Mag11] C. P. Magnaghi, 2011. Análise e Tradução Comentada da Obra de Arquimedes Intitulada "Método sobre os Teoremas Mecânicos." Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas—UNICAMP, Campinas. Orientador: A. K. T. Assis. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis e www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/262049.

[Mal02] N. A. Malara. *Educazione Matematica e Sviluppo Sociale*. Rubettino Editore, S. R. L., Catanzaro, 2002.

[Mug70] C. Mugler. *Les Oeuvres d'Archimède*, volume 1: *De la Sphère et du Cylindre, La Mesure du Cercle, Sur les Conoïdes et les Sphéroïdes.* Budé, Paris, 1970.

[Mug71a] C. Mugler. *Les Oeuvres d'Archimède*, volume 2: *Des Spirales, De l'Équilibre des Figures Planes, L'Arénaire, La Quadrature de la Parabole.* Budé, Paris, 1971.

[Mug71b] C. Mugler. *Les Oeuvres d'Archimède*, volume 3: *Des Corps Flottants, Stomachion, La Méthode, Le Livre des Lemmes, Le Problème des Boeufs.* Budé, Paris, 1971.

[Mug72] C. Mugler. *Les Oeuvres d'Archimède*, volume 4: *Commentaires d'Eutocius et Fragments.* Budé, Paris, 1972.

[Net11] R. Netz. The place of Codex C in Archimedes scholarship. In R. Netz, W. Noel, N. Tchernetska, and N. Wilson, editors, *The Archimedes Palimpsest*, volume 1: Catalogue and Commentary, pages 266–325. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[Neu75] O. Neugebauer. *A History of Ancient Mathematical Astronomy.* Springer, Berlin, 1975.

[Neu83] O. Neugebauer. *Astronomy and History: Selected Essays.* Springer, Berlin, 1983.

[NN07a] R. Netz and W. Noel. *The Archimedes Codex: How a Medieval Prayer Book Is Revealing the True Genius of Antiquity's Greatest Scientist.* Da Capo Press, Cambridge, 2007.

[NN07b] R. Netz and W. Noel. *Il Codice Perduto di Archimede.* Rizzoli, Milano, 2007. Traduzione di C. Capararo.

[NN09] R. Netz and W. Noel. *Códex Arquimedes.* Record, Rio de Janeiro, 2009. Tradução de R. Schwartz, revisão técnica de D. V. Bevilacqua.

[NNWT11a] R. Netz, W. Noel, N. Wilson, and N. Tchernetska. *The Archimedes Palimpsest*, volume 1: Catalogue and Commentary. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[NNWT11b] R. Netz, W. Noel, N. Wilson, and N. Tchernetska. *The Archimedes Palimpsest*, volume 2: Images and Transcriptions. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[NST01] R. Netz, K. Saito, and N. Tchernetska. A new reading of Method proposition 14: preliminary evidence from the Archimedes palimpsest (part 1). *SCIAMVS*, 2:9–29, 2001.

[NST02] R. Netz, K. Saito, and N. Tchernetska. A new reading of Method proposition 14: preliminary evidence from the Archimedes palimpsest (part 2). *SCIAMVS*, 3:109–125, 2002.

[OR99] J. J. O'Connor and E. F. Robertson, 1999. Democritus of Abdera. Disponível em http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Democritus.html.

[Pet11] E. Petersen. *Itinera Archimedea*: on Heiberg in Constantinople and Archimedes in Copenhagen. In R. Netz, W. Noel, N. Tchernetska, and N. Wilson, editors, *The Archimedes Palimpsest*, volume 1: Catalogue and Commentary, pages 118–127. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[Plu] Plutarco. De communibus notitiis adversus Stoicos. Disponível em http://www.poesialatina.it/_ns/greek/testi/Plutarchus/De_communibus_notitiis_adversus_Stoicos_(1058e-1086b).html e http://www.epitteto.com/Plutarco%20BUONSENSO%20testo.html.

[Plu87] Plutarco. *La Vita di Marcello*. Felice Valgrisio, Venezia, 1587. Tradução italiana de L. Domenichi.

[Ror] C. Rorres. *Archimedes*. Homepage criada e mantida por C. Rorres. Disponível em: www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/contents.html.

[Ruf61] E. Rufini. *Il "Metodo" di Archimede e le Origine del Calcolo Infinitesimale nell'Antichità*. Feltrinelli, Milano, 1961.

[Sam62] Luciano de Samosata. *Opere (Ippia)*. Felice Le Monnier, Firenze, 1862.

[San02] R. J. Santos. *Matrizes, Vetores e Geometria Analítica*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2002.

[Sec10] V. L. V. Seco. Estudos sobre "O Método" de Arquimedes através da Construção de Balanças e Alavancas. Instituto de Física, Universidade Estadual de Campinas—UNICAMP, Relatório Final de F590 — Iniciação Científica I, primeiro semestre de 2010. Orientador: A. K. T. Assis. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis, 2010.

[Smi09] D. E. Smith. A newly discovered treatise of Archimedes. *The Monist*, 19:202–230, 1909.

[Soa14] N. M. F. Soares. Sobre o Conhecimento e a Difusão das Obras de Arquimedes em Portugal. Master's thesis, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa, 2014. Orientador: H. J. S. S. d. S. Leitão.

[Tit] Tito Livio. *Ab Urbe Condita*. Disponível em www.thelatinlibrary.com.

[Vit] Vitruvio. *De Architectura*. Disponível em: www.thelatinlibrary.com.

Em 1906 Johan Ludvig Heiberg (1854-1928), filólogo e historiador da ciência dinamarquês, descobriu um texto até então desconhecido de Arquimedes (287-212 a.C.). Era uma carta endereçada a Eratóstenes (285-194 a.C.), o famoso cientista grego responsável pela grande Biblioteca de Alexandria e pela medida mais famosa e precisa da antiguidade do raio da Terra. Este trabalho de Arquimedes tem sido desde então chamado usualmente de ***O Método***. Normalmente os cientistas usam a matemática para deduzir leis e propriedades físicas dos corpos. Arquimedes inverteu este procedimento ou paradigma com seu método, utilizando a física para derivar resultados matemáticos. Apresentou nessa carta um método heurístico para calcular áreas, volumes e centros de gravidade de figuras geométricas utilizando a lei da alavanca. Foi assim, em particular, que conseguiu deduzir grandezas matemáticas tais como a área e o volume de uma esfera. Por este motivo seu método tem sido considerado por alguns autores como uma revolução copernicana. Esse livro apresenta uma análise e uma tradução comentada completa, do grego para o português, dessa obra de Arquimedes. Nele são incluídos também diversos elementos de uma versão ilustrada desse método no qual utilizamos o mínimo de matemática e uma grande quantidade de figuras ilustrando as alavancas em equilíbrio empregadas implicitamente por Arquimedes.

**Sobre os Autores:**

**Ceno Pietro Magnaghi** nasceu na Itália em 1942 onde completou seus estudos na escola secundária. Formou-se em Engenharia Química em 1967 na Universidade Católica de São Paulo. Obteve o bacharelado (2007) e o mestrado (2011) pelo Instituto de Física da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP. Trabalhou por mais de trinta anos nas indústrias químicas e petroquímicas do Brasil e da Argentina. Deu aulas sobre Petroquímica e Instalações Industriais na Faculdade de Engenharia Química da UNICAMP.

**André Koch Torres Assis** nasceu em 1962. Concluiu o bacharelado e o doutorado no Instituto de Física da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP (1983 e 1987, respectivamente). Realizou um pós-doutorado no Laboratório Culham (Oxfordshire, Inglaterra, United Kingdom Atomic Energy Authority, 1988) e outro no Centro de Pesquisa Eletromagnética da Northeastern University (Boston, EUA, 1991-1992). De agosto de 2001 até novembro de 2002, assim como de fevereiro a maio de 2009, trabalhou no Instituto para a História das Ciências Naturais da Hamburg Universität (Hamburgo, Alemanha), com bolsas de pesquisa concedidas pela Fundação Alexander von Humboldt, da Alemanha. De abril a junho de 2014 trabalhou na Technische Universität Dresden, na Alemanha, também com bolsa concedida pela Fundação Humboldt. É o autor de diversos livros de física disponíveis gratuitamente em sua homepage. Suas obras *"Eletrodinâmica de Weber"* e *"Eletrodinâmica de Ampère"* receberam os Prêmios Jabuti 1996 e 2012 concedidos pela Câmara Brasileira do Livro como livros do ano na área de Ciências Exatas.

É professor do Instituto de Física da UNICAMP desde 1989, onde orienta estudantes de graduação e de pós-graduação, realizando pesquisas sobre os fundamentos do eletromagnetismo, da gravitação e da cosmologia.

978-1-987980-17-2

9 781987 980172